Année : 2021 *N° attribué par la bibliothèque*

Algèbre 3
Cours et exercices corrigés

Polycopie destiné aux étudiants de 2ème année licence en mathématiques

Université de Saïda - Dr Moulay Tahar

Département : *MATHEMATIQUES*

Laboratoire : *Géométrie, Analyse, Contrôle et Applications*

***T**ayeb **D**jebbouri*[1]

1. E-mail : tdjebbouri20@gmail.com et/ou : tayeb.djebbouri@univ-saida.dz

Table des matières

Introduction **4**

1 Réduction des endomorphismes **6**

1.1 Éléments propres d'un endomorphisme 6

1.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres 6

1.1.2 Caractérisation des valeurs propres 8

1.2 Sous-espaces propres 10

1.2.1 Somme de sous-espaces propres 11

1.3 Cas d'un espace de dimension finie 13

1.3.1 Écriture sous forme matricielle 13

1.3.2 Calcul des valeurs propres 14

1.3.3 Calcul des vecteurs propres 20

1.3.4 Illustration avec un exemple 23

1.4 Exercices 26

2 Diagonalisation d'un endomorphisme **34**

2.1 Diagonalisation d'un endomorphisme 34

2.2 Caractérisation de la diagonalisation en dimension finie 37

2.2.1 Endomorphisme nilpotent 41

2.2.2 Théorème de Cayley -Hamilton 42

2.2.3 Décomposition de Dunford 45

2.3 Exercices 46

3 Trigonalisation d'un endomorphisme **67**
3.1 Définitions 67
3.2 Illustration avec un exemple 71
3.3 Réduction de Jordan 75
3.4 Exercices 79

4 Annales **92**

Bibliographie **95**

Introduction

Étant donné un endomorphsime f d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif $\mathbb{k}$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la puissance $n^{ième}$ de f, que l'on note f^n, est définie par

$$f^0 = Id_E \qquad \text{et} \qquad f^{n+1} = f^n \circ f.$$

Une question naturelle se pose : étant donnée l'expression explicite de $f(x)$, pour tout $x \in E$, peut-on retrouver l'expression explicite de $f^n(x)$?
Le réponse à cette ne semble pas évidente même lorsque E est de dimension finie, car il s'agit de calculer la puissance $n^{ième}$ d'une matrice carrée A d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{k}$. Comme on sait que la puissance $n^{ième}$ d'une matrice diagonale D est la matrice diagonale dont les éléments composant la diagonale sont les puissances $n^{ième}$ de éléments diagonaux de D. Si la matrice A n'est pas diagonale, on peut espérer l'écrire sous la forme

$$A = PDP^{-1},$$

où P est une matrice inversibles et D une matrice diagonale. Auquel cas, on aurait

$$A^n = PD^nP^{-1},$$

ce qui permet de calculer facilement A^n. Dans ce cas de figure, la matrice A, ou l'endomorphisme qu'elle représente, sera dite diagonalisable.
À défaut de pouvoir diagonaliser une matrice carrée, on peut espérer soit, écrire A sous la forme triangulaire ou sous une forme diagonale par blocs appelée la forme de Jordan.
Dans tous les cas de figure cités ci-dessus, il s'agit de réduire l'endomorphisme f, ou sa matrice associée relativement à une base de E. La réduction des endomorphismes en

dimension finie a beaucoup d'applications, notamment dans la résolution des systèmes linéaires et des systèmes linéaires d'équations différentielles d'ordre 1 à coefficients constants, elle fera l'objet de ce manuscrit qui est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des valeurs propres d'un endomorphisme et leurs espace propres associés, avec une attention particulière accordée au cas d'un espace vectoriel de dimension finie où l'on traite des exemples concrêts de calcul explicites des valeurs propres et leurs espace propres.

Le deuxième chapitre s'articule autour de la diagonalisation d'un endomorphisme. Après la définition, on se restreint au cas de dimension finie où l'on parle du théorème de Cayley-Hamilton et de la décomposition de Dunford entre autres.

Le troisième et dernier chapitre étudie le cas où l'endomorphisme n'est pas diagonalisable. Dans ce cas, deux possibilités de réduction s'offrent à nous : la trigonalisation et la réduction de Jordan, ces deux notions seront introduites et illustrées avec des exemples.

À la fin de chapitre il y a des exercices d'entraînement avec solutions. Quant aux anciennes épreuves d'évaluation, elle sont regroupées à la fin de ce manuscrit qui s'achève avec une bibliographie.

Chapitre 1

Réduction des endomorphismes

Dans tout le maniscrit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 1.1.1. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle valeur propre de f tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel l'ensemble $\{u \in E : f(u) = \lambda u\}$ est différent de $\{O_E\}$ .i.e.*

$$(\lambda \text{ valeur propre de } f) \Leftrightarrow (\exists u \in E \setminus \{O_E\} : f(u) = \lambda u)$$

– Le vecteur u non nul de E se nomme vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
– Le couple (λ, u) de $\mathbb{K} \times (E \setminus \{O_E\})$ se nomme élément propre de f.
– L'ensemble des valeurs propres de f, noté $Sp(f)$, se nomme le spectre de f

Remarques :

1. Dans la définition 1.1.1, la condition $\{u \in E : f(u) = \lambda u\} \neq \{O_E\}$ est impérative, car si on autorisait le vecteur nul, n'importe quel scalaire λ de $\mathbb{K}$ conviendrait et la définition d'une valeur propre serait alors dépourvue d'intérêt.

2. Bien évidemment, les notions de valeur propre et de vecteur propre n'ont de sens que pour des endomorphismes puisqu'un vecteur propre et son image appartiennent nécessairement au même espace vectoriel.

Exemple 1.1.1. *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. On déterminer les valeurs propres de p.*

$$\begin{aligned}
(\lambda \in \mathbb{K} \textit{ valeur prope de } p) &\implies \exists u \in E \setminus \{O_E\} : p(u) = \lambda u \\
&\implies p(p(u)) = p(\lambda u) && \textit{car } p \textit{ est une application} \\
&\implies p \circ p(u) = \lambda p(u) && \textit{car } p \textit{ est linéaire} \\
&\implies p(u) = \lambda p(u) && \textit{car } p \circ p = p \\
&\implies \lambda u = \lambda^2 u && \textit{car}\lambda \textit{ valeur propre de } p \\
&\implies (\lambda^2 - \lambda)u = O_E
\end{aligned}$$

Utilisons le fait que $u \neq O_E$ cela nous donne $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \; ou \; \lambda = 1$.
d'où $Sp(p) \subseteq \{0, 1\}$. Inversement, si $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}; \exists u \in E \setminus \{O_E\} : p(u) \neq O_E \Rightarrow \exists v = p(u) \neq O_E : p(v) = v$
Si $p \in \mathcal{L}(E) - \{0_{\mathcal{L}(E)}, Id_E\} : Sp(p) = \{0, 1\}$

Exemple 1.1.2. *Considérons à présent le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Cet espace est de dimension infinie. Considérons l'application linéaire D qui à un élément φ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ lui associe son application dérivée :*

$$\begin{array}{rcl} D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & D(f) = f'. \end{array}$$

L'application D est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Soit λ une valeur propre de D i.e.

$$\exists f \neq 0_{\mathcal{C}^\infty \mathbb{R}} / D(f) = \lambda f \Rightarrow f' = \lambda f$$

. On déduit que $Sp(D) = \mathbb{R}$ car $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ il existe une fonction

$$f : x \to e^{\lambda x} \; tq \; D(f) = \lambda f \; i.e. \; D(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Remarquons que cet ensemble est infini.

Exemple 1.1.3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :*

$$f(e_1) = e_1 - e_2 - e_3, \quad f(e_2) = -e_1 + e_2 - e_3, \quad f(e_3) = -e_1 - e_2 + e_3$$

Le vecteur $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ car

$$\begin{aligned} f(u_1) &= f(e_1 + e_2 + e_3) \\ &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \qquad (f \textit{ est linéaire}) \\ &= -(e_1 + e_2 + e_3) \\ &= -u_1. \end{aligned}$$

1.1.2 Caractérisation des valeurs propres

On note Id_E l'application identité de E, i.e.

$$\begin{array}{rcl} Id_E : E & \to & E \\ x & \mapsto & Id_E(x) = x \end{array}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de l'endomorphisme f de E et u un vecteur propre associé à λ. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda u &\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E)(u) = 0_E \\ &\Leftrightarrow u \in \ker(f - \lambda Id_E) \end{aligned}$$

L'existence d'un vecteur propre u, qui est nécessairement non nul, signifie que le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n 'est pas réduit au vecteur nul, ou, d'une manière équivalente, que l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif. Vient de démontrer la proposition suivante.

Proposition 1.1.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre de f est que l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ ne soit pas injectif.*

Une valeur propre peut-elle être nulle ?

Bien évidemment, la réponse est «oui».[1] En effet, 0 est valeur propre d'un endomor-

1. En revanche, un vecteur propre n'est, par définition , jamais égal au vecteur nul

phisme f de E signifie qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $f(u) = Ou = O_E$. Autrement dit, 0 est valeur propre de f signifie que

$$\ker f \neq \{O_E\}$$

c'est-à-dire que f n'est pas injectif. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit valeur propre de f est que f ne soit pas injectif.

Proposition 1.1.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times (E \setminus \{O_E\})$ un élément propre de f . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,(λ^n, u) est un élément propre de f^n où*

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\ fois}$$

De plus, si f est bijectif alors $\lambda \neq 0$ et (λ^{-1}, u) est un élément propre de f^{-1}.

Preuve :
Soit $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times (E \setminus \{O_E\})$ un élément propre de f. Montrons que (λ^n, u) est un élément propre de $\mathbb{K}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Effectuons une récurrence sur l'entier n. La propriété est immédiate pour $n = 1$.
Supposons que (λ^n, u) soit un élément propre de f^n avec $n \geq 2$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et déduisons-en que (λ^{n+1}, u) est un élément propre de f^{n+1} . Par hypothèse, $f^n(u) = \lambda^n u$. En appliquant f à cette égalité et en utilisant la propriété de linéarité de f, on obtient

$$\begin{aligned} f^n(u) = \lambda^n u &\implies f(f^n(u)) = f(\lambda^n u) \\ &\implies f^{n+1}(u) = \lambda^n f(u) \\ &\implies f^{n+1}(u) = \lambda^n(\lambda u) \\ &\implies f^{n+1}(u) = \lambda^{n+1} u \end{aligned}$$

Où il a été tenu compte que (λ, u) était un élément propre de f. On a ainsi obtenu l'égalité : $f^{n+1}(u) = \lambda^{n+1}u$, ce qui montre que (λ^n, u) est élément propre de f^n.
Supposons à présent f bijectif. Ainsi, f est injectif et $\lambda \neq 0$ (nous utilisons ici la caractérisation suivante : 0 est valeur propre d 'un endomorphisme f si et seulement

si, f n'est pas injectif). Par hypothèse on a :

$$\begin{array}{lll} f(u) = \lambda u & \Longrightarrow f^{-1}(f(u)) = f^{-1}(\lambda u) & \textit{car } f \textit{ est bijective} \\ & \Longrightarrow u = \lambda f^{-1}(u) & \textit{car } f^{-1} \textit{ est linéaire} \\ & \Longrightarrow f^{-1}(u) = \lambda^{-1} u & \textit{car } \lambda \neq 0 \end{array}$$

Ce qui montre que (λ^{-1}, u) est un élément propre de f^{-1}.

1.2 Sous-espaces propres

Lemme 1.2.1. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Considérons deux vecteurs propres u et v associés à la même valeur propre λ de f. On vérifie que tout vecteur non nul de la forme $\alpha u + \beta v$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ est aussi vecteur propre associé à λ. En effet,*

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha u + \beta v) & = & \alpha f(u) + \beta f(v) \\ & = & \alpha(\lambda u) + \beta(\lambda v) \\ & = & \lambda(\alpha u + \beta v). \end{array}$$

Rappelons qu'un vecteur propre est (par définition) non nul. Aussi, pour que l'ensemble formé de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ définisse un sous-espace vectoriel, il faut lui adjoindre le vecteur nul.

Lemme 1.2.2. *Soit f un endomorphisme de E et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de f. Si u vecteur propre de f associé à la valeur propre λ alors tout vecteur non nul colinéaire à u est aussi vecteur propre de f associé à λ.*

Preuve :
Soit $v = \alpha u$ tel que $\alpha \neq 0$ car $v \neq O_E$(vecteur propre).
Calculons

$$\begin{array}{rcccl} f(v) & = & f(\alpha u) & = & \alpha f(u) \\ & = & \alpha\lambda u & = & \lambda\alpha u \\ & = & \lambda v. & & \end{array}$$

Définition 1.2.1. *Soient f un endormorphisme d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f . On appelle sous-espace propre associé à λ, et on note E_λ, le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul. Autrement dit,*

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\} \\ &= \ker(f - \lambda Id_E). \end{aligned}$$

Remarques :

- Tous les vecteurs de l'espace propre E;. sont des vecteurs propres de f (associés à la valeur propre λ) , à l'exception du vecteur nul.
- Si $u \in E$ est un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\mathbb{K}.u \subset E_\lambda$.
- Si 0 est valeur propre de f alors $E_0 = \ker f$. En d'autres termes, si 0 est valeur propre de f alors le sous-espace propre de f associé à 0 est le noyau de f.

1.2.1 Somme de sous-espaces propres

Soient E_{λ_1} et E_{λ_2} deux sous-espaces propres de f associés aux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 . Nous allons montrer que les deux sous-espaces E_{λ_1} et E_{λ_2} sont en somme directe dans E. Pour le cas présent, on doit vérifier que

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$$

C'est immédiat. En effet, si $u \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$, alors $f(u) = \lambda_1 u$ et $f(u) = \lambda_2 u$. On obtient :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)u = 0_E$$

et on en déduit $u = O_E$ puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La somme des deux sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} se note alors $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ (somme directe)

Nous allons généraliser les définitions de somme, somme directe et sous-espaces supplémentaires au cas de plus de deux sous-espaces.

Proposition 1.2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace et f une application linéaire de E dans E. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des valeurs propres de f distinctes deux à deux alors la somme des sous-espaces propres correspondants $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_m}$ est directe. On la note dans ce cas $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m}$.*

Démonstration :

Soit x un vecteur appartenant au sous-espace vectoriel $E_{\lambda_1}+\ldots+E_{\lambda_m}$. Par définition de la somme de sous-espaces vectoriels. il existe $x_1,\ldots,x_m \in E_{\lambda_1}\times\ldots\times E_{\lambda_m}$ tel que

$$x = x_1 + \ldots + x_m \tag{1.1}$$

Montrons que cette décomposition est unique. Appliquons successivement $f, f^2, \ldots, f^{m-l}$ à l'égalité (1.1) . On obtient le système suivant :

$$(\mathrm{S})\begin{cases} x & = & x_1 & + & x_2 & +\ldots+ & x_m \\ f(x) & = & \lambda_1 x_1 & + & \lambda_2 x_2 & +\ldots+ & \lambda_m x_m \\ f^2(x) & = & \lambda_1^2 x_1 & + & \lambda_2^2 x_2 & +\ldots+ & \lambda_m^2 x_m \\ \\ f^{m-1}(x) & = & \lambda_1^{m-1} x_1 & + & \lambda_2^{m-1} x_2 & +\ldots+ & \lambda_m^{m-1} x_m \end{cases}$$

où il a été tenu compte, pour tout $k \in 1,\ldots,m$, que

$$f(x_k) = \lambda_k x_k, \quad f^2(x_k) = \lambda_k^2 x_k, \ldots, f^{m-1}(x_k) = \lambda_k^{m-1} x_k$$

Le système linéaire (S) est un système à m-équations, d'inconnue le m-uplet $x_1,\ldots,x_m$ de $E_{\lambda_1}\times\ldots\times E_{\lambda_m}$. Son déterminant est connu. C 'est le déterminant de Vandermonde d'ordre m associé aux coefficients $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Il est donné par

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le m} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Il est non nul puisque les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ sont supposées distinctes deux à deux. Le système linéaire (S) est donc de Cramer : il existe un unique m-uplet $x_1,\ldots,x_m$ de $E_{\lambda_1}\times\ldots\times E_{\lambda_m}$, solution du système (S) ; ceci montre l'unicité de la décomposition (1.1).

Corollaire 1.2.1. *Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ des n valeurs propres distinctes de f. Si $u_1,\ldots,u_n$ n vecteurs propres associés à $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ respectivement. alors la famille $\{u_1,\ldots,u_n\}$ est libre.*

1.3 Cas d'un espace de dimension finie

On se restreint maintenant au cas où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et on note $dim_{\mathbb{K}}(E) = n$.

1.3.1 Écriture sous forme matricielle

On munit l'espace E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soient f un endomorphisme de E, λ une valeur propre de f ($\lambda \in \mathbb{K}$) et x un vecteur propre de f associé à λ ($x \in E \backslash \{0_E\}$). En notant $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j, \leq n}$ la matrice (carrée d'ordre n) associée à f relativement à $\mathcal{B}$ et X la matrice-colonne formée des coordonnées $x_1, \dots, x_n$ du vecteur propre x dans la même base $\mathcal{B}$, l'égalité vectorielle

$$f(x) = \lambda x$$

s'écrit dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme matricielle

$$AX = \lambda X,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On étend aux matrices carrées [2] les notions définies sur les endomorphismes

Définition 1.3.1. *Soit A une matrice carrée d 'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

– *On appelle valeur propre de A tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe une matrice-colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que*

$$AX = \lambda X.$$

2. Les notions de valeur propre et de vecteur propre sont dépourvues de sens pour des matrices rectangulaires et non carrées !

La matrice-colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée vecteur propre de A associé à λ et le couple (λ, X) se nomme élément propre de A.

- *On appelle espace propre de A associé à λ, et on note E_λ, l e sous-espace de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par*

$$E_\lambda =^{déf} \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

- *On appelle spectre de A le sous-ensemble de $\mathbb{K}$ constitué de toutes les valeurs propres de A. On le note $Sp(A)$.*

1.3.2 Calcul des valeurs propres

Commençons par donner une caractérisation des valeurs propres, plus pratique que celle de la proposition (1.1.1). On note I_n la matrice unité d'ordre n. On rappelle que I_n est inversible et que c'est la matrice associée à l'application identité relativement à n'importe quelle base de E. Puisque $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice associée à l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ relativement à $\mathcal{B}$ est $A - \lambda I_n$.
D'après la proposition (1.1.1),

$$\lambda \ valeur \ propre \ de \ f \iff (f \ - \lambda \ Id_E) \ non \ injectif. \tag{1.2}$$

Puisque l'espace E est de dimension finie, on a équivalence entre les propriétés d'injectivité et de bijectivité de l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$. Autrement dit,

$$(f \ - \lambda \ Id_E) \ non \ injectif \iff (f \ - \lambda \ Id_E) \ non \ bijectif. \tag{1.3}$$

Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit bijectif est que sa matrice représentative dans n'importe quelle base soit inversible. On a ainsi l'équivalence :

$$(f \ - \lambda \ Id_E) \ non \ bijectif \iff (A - \lambda I_n) \ non \ inversible. \tag{1.4}$$

Enfin, la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si, son déterminant est nul. En regroupant ce dernier résultat avec les trois équivalences (1.2) , (1.3) et (1.4), on obtient finalement l'équivalence suivante :

$$\lambda \ valeur \ propre \ de \ f \iff det(A - \lambda I_n) = 0. \tag{1.5}$$

On a ainsi établi la proposition suivante.

Proposition 1.3.1. *Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, f un endomorphisme de E et A sa matrice associée relativement à $\mathcal{B}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre de f est que*

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

On en déduit que, pour que 0 soit valeur propre de A, il faut et il suffit que $det(A) = 0$, c'est-à-dire que A ne soit pas inversible. On a ainsi montré la caractérisation suivante.

Corollaire 1.3.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée A soit inversible est que 0 ne soit pas valeur propre de A. En d'autres termes, pour toute matrice A carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$, on a l 'équivalence :*

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff 0 \notin Sp(A)$$

.

Étant donnée la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, l'application $\lambda \in \mathbb{K} \longmapsto det(A - \lambda I_n) \in \mathbb{K}$ est une application polynomiale de degré n. Cela conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 1.3.2. *Soit A une matrice carrée d 'ordre n sur $\mathbb{K}$.*

- *On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré n , noté P_A , défini par*
$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n) \ .$$
- *L'équation algébrique $P_A(\lambda) = 0$, d'inconnue le scalaire λ de $\mathbb{K}$, s'appelle équation caractéristique associée à la matrice A .*

La détermination des valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$ est équivaut au calcul des zéros du polynôme caractéristique P_A de degré n. En effet, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f est équivaut à $P_A(\lambda) = 0$, c'est-à-dire à

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Exemple : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f qui, au vecteur x, de coordonnées x_1, x_2, x_3 dans $\mathcal{B}$, associe le vecteur y, de coordonnées y_1, y_2, y_3 dans $\mathcal{B}$ telles que

$$y_1 = x_1 - x_2 - x_3, y_2 = -x_1 + x_2 - x_3, y_3 = -x_1 - x_2 + x_3$$

Relativement à la base $\mathcal{B}$, la matrice associée à f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Détaillons les calculs. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Commençons par retrancher la troisième colonne à la première ($C_1 \leftarrow C_1 - C_3$) :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Puis développons par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda(\lambda-2)} + (\lambda-2)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}}_{=2-\lambda}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

Les valeurs propres de A, et donc de f, sont les deux réels -1 et 2.
On écrit : $Sp(A) = \{-1, 2\}$.

Remarques :

– Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ une matrice carrée d'ordre 2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$$
$$= \lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{=Tr(A)} \lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{=det(A)}$$

et, comme indiqué sous les accolades, on remarque que les scalaires $a_{11} + a_{22}$ et $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sont respectivement la trace et le déterminant de A. Par conséquent,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} P_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A).$$

Plus généralement, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} Tr(A) \lambda^{n-1} + \ldots + det(A).$$

– Si une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure ou inférieure, alors ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale puisque

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda), \ pourvtout \ \lambda \in \mathbb{K}$$

C 'est en particulier aussi le cas lorsque A est diagonale.

Remarquons que le calcul des valeurs propres de l'endomorphisme f de E s'effectue en résolvant l 'équation caractéristique $P_A(\lambda) = 0$, où le polynôme caractéristique P_A est défini à partir de la matrice A, elle-même définie à partir d'une base $\mathcal{B}$ de E. La question suivante est alors légitime.

Le calcul des valeurs propres dépend-il de la base choisie ?

La réponse à cette question est « non ». Pour le vérifier, considérons une deuxième base $\mathcal{C}$ de l'espace E et désignons par B la matrice représentative de f dans $\mathcal{C}$. Le polynôme caractéristique de B est défini par :

$$P_B(\lambda) = det(B - \lambda I_n), \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Les deux matrices A et B sont semblables car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Elles vérifient ainsi :

$$B = P^{-1}AP$$

où P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Vérifions que $P_B(\lambda) = P_A(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ En utilisant $det(P^{-1}) = \frac{1}{det(P)}$, on vérifie :

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\
&= det(P^{-1}(AP - \lambda P)) \\
&= det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\
&= det(P^{-1}) \times det(A - \lambda I_n) \times det(P) \\
&= det(A - \lambda I_n) \\
&= P_A(\lambda)
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique P_A est par conséquent invariant lorsqu 'on remplace A par une matrice semblable ou, de manière équivalente, lorsqu'on représente f dans des bases différentes. On le note ainsi P_f et on dit que P_f est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \; P_f(\lambda) = det(Mat_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n) = det(Mat_{\mathcal{B}}(f - \lambda id_E))$$

pour toute base $\mathcal{B}$ de E. Le calcul des valeurs propres étant invariant par changement de base, nous pouvons ainsi nous placer dans n'importe quelle base de E pour calculer les valeurs propres d'un endomorphisme f de E.

Définition 1.3.3. *Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.*

- *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité h du polynôme caractéristique de f alors on dit que λ est une valeur propre de multiplicité h (ou d'ordre h) de f .*
- *En particulier, si $h = 1$ alors la valeur propre est dite simple . Si $h > 1$ alors la valeur propre est dite multiple. Elle est dite double lorsque $h = 2$ et triple lorsque $h = 3$.*

Existe-t-il toujours des valeurs propres ?

La réponse est « oui » à la condition que le corps $\mathbb{K}$ considéré soit algébriquement clos. C'est le cas du corps $\mathbb{C}$. Rappelons que tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet n racines (comptées avec leurs multiplicités) dans $\mathbb{C}$. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace E se factorise ainsi dans $\mathbb{C}$ comme suit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ P_f(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{h_i}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ désignent les valeurs propres distinctes de f , de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$ et où $m \leq n$ et $h_1 + h_2 + \cdots + h_m = n$. Ainsi, un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, admet toujours (au moins) une valeur propre (sous-entendu dans $\mathbb{C}$) et le nombre de valeurs propres distinctes est inférieur ou égal à n, ce que l'on résume par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad (Sp(A) \neq \emptyset \quad et \quad card(Sp(A)) \leq n).$$

La situation est différente lorsque l'on travaille sur le corps des nombres réels car, contrairement à $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos. Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel peut ne pas avoir de valeur propre. C'est par exemple le cas de la matrice réelle suivante :

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$. En effet,

$$P_{A_\theta}(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A_\theta)\lambda + det(A_\theta) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

Les valeurs propres sur $\mathbb{C}$ sont $\lambda_1 = e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ car

$$P_{A_\theta}(e^{i\theta}) = P_{A_\theta}(e^{-i\theta}) = 0$$

Si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ alors A_θ ne possède aucune valeur propre dans $\mathbb{R}$; son spectre est vide. En revanche, si $\theta = 0$ ou si $\theta = \pi$ alors le spectre est non vide puisque

$$Sp(A_0) = Sp(I_2) = \{1\} \quad \text{et} \quad Sp(A_\pi) = Sp(-I_2) = \{-1\}$$

1.3.3 Calcul des vecteurs propres

Intéressons-nous maintenant au calcul des vecteurs propres correspondant à chacune des valeurs propres . Soit $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Calculer x, c'est résoudre l'équation vectorielle suivante :

$$(f - \lambda id_E)(x) = 0_E$$

.

Les solutions sont les vecteurs du sous-espace propre $E_\lambda = \ker(f - \lambda id_E)$. Puisque $f - \lambda id_E$ n'est pas injective, il existe des solutions autres que le vecteur nul. Se pose alors la question de la dimension du sous-espace propre E_λ . On sait déjà que E_λ est de dimension finie et que sa dimension ne peut excéder n puisque E_λ est inclus dans E et $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$. Remarquons que si $u \neq 0_E$ désigne un vecteur propre de f associé à la valeur propre,$\lambda \in \mathbb{K}$ alors, nécessairement, $\mathbb{K}u \subset E_\lambda$ d'où

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) \geq 1$$

car $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}u) = 1$. Le sous-espace propre E_λ est donc de dimension supérieure ou égale à 1. La proposition suivante complète ce résultat.

Proposition 1.3.2. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Si λ est une valeur propre de multiplicité h de f alors*

$$1 \leq \dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) \leq h.$$

En particulier, si λ est une valeur propre simple de f alors $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) = 1$.

Démonstration Soit $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, nous notons provisoirement $\widetilde{\lambda}$ une valeur propre de multiplicité h de f et λ la variable du polynôme caractéristique P_f. Puisque $\widetilde{\lambda}$ est valeur propre de multiplicité h, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n - h$ tel que

$$P_f(\lambda) = (\lambda - \widetilde{\lambda})^h Q(\lambda)$$

avec $Q(\widetilde{\lambda}) \neq O$. Désignons par $p \geq 1$ la dimension du sous-espace propre $E_{\widetilde{\lambda}}$, associé à la valeur propre $\widetilde{\lambda}$. Montrons que $(\lambda - \widetilde{\lambda})^P$ divise le polynôme caractéristique P_f. Pour cela, nous munissons le sous-espace propre $E_{\widetilde{\lambda}}$, d'une base $(u_1, \dots, u_p)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille (libre) par $n-p$ vecteurs $v_1, \dots, V_{n-p}$ de E, pour obtenir une base de E. Notons $\mathcal{C}$ cette nouvelle base : $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_{n-p})$. Pour chaque entier j compris entre 1 et p, le vecteur u_j est un vecteur propre correspondant à la valeur propre $\widetilde{\lambda}$ On a donc $f(u_j) = \widetilde{\lambda} u_j$ pour tout $j \in 1, \dots, p$. Écrivons alors la matrice $Mat\mathcal{C}(f)$ associée à f dans la nouvelle base $\mathcal{C}$. Concentrons-nous sur ses p premières colonnes. Pour j variant de 1 à p, son j-ième vecteur-colonne est, par définition, constitué des coordonnées du vecteur $f(u_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. On a alors :

$$\begin{array}{cc} f(u_1) f(u_2) \cdots f(u_p) f(v_1) \cdots f(v_{n-p}) & \\ Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda} & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \widetilde{\lambda} & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & R \\ 0 & \cdots & 0 & \widetilde{\lambda} & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & S \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-p} \end{array} \end{array}$$

où R est une matrice rectangulaire de type $(p, n-p)$ et S une matrice carrée d'ordre $n-p$. L'expression du polynôme caractéristique associé à f étant indépendante de la base choisie, on a :

$$P_f(\lambda) = det(Mat_{\mathcal{C}}(f) - \lambda I_n).$$

En développant par rapport aux p premières colonnes, on obtient :

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= (\widetilde{\lambda}-\lambda)^p det(S-\lambda I_{n-p}) \\ &= (-1)^p(\lambda-\widetilde{\lambda})^p det(S-\lambda I_{n-p}). \end{aligned}$$

Ainsi, $(\lambda-\widetilde{\lambda})^p$ divise le polynôme P_f, ce qui termine la démonstration puisque $(\lambda-\widetilde{\lambda})^p$ ne divisant pas Q, cela signifie qu'il divise nécessairement $(\lambda-\widetilde{\lambda})^h$, d'où $p \leq h$. En particulier, si la multiplicité de $\widetilde{\lambda}$ est égale à 1, on en déduit immédiatement que $p = 1$.

Comment déterminer la dimension d'un sous-espace propre ?

Dans le cas d'une valeur propre simple, c'est immédiat car le sous-espace propre associé est de dimension égale à 1. En revanche, dans le cas d'une valeur propre de multiplicité $h \geq 2$, cela l'est moins car la dimension du sous-espace propre associé n'est a priori pas égale à h. Pour déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$, il suffit cependant d'appliquer le théorème du rang à l'endomorphisme $f - \lambda id_E$. On obtient alors la relation :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = rg(f-\lambda id_E) + \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f-\lambda id_E)),$$

d'où, puisque $E_\lambda = \ker(f-\lambda id_E)$,

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - rg(f-\lambda id_E).$$

Le calcul du rang de $(f-\lambda id_E)$ nous permet donc de trouver $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$.

Détermination d'une base d'un sous-espace propre

Après avoir calculé la dimension du sous-espace propre E_λ, on en cherche une base. Si $p = \dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$ alors cela revient à chercher p vecteurs linéairement indépendants vérifiant l'équation vectorielle suivante :

$$(f-\lambda id_E)(x) = 0_E$$

ou, de manière équivalente (en se plaçant dans la base $\mathcal{B}$), vérifiant l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ désignent les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, la détermination d'une base du sous-espace propre E_λ. se ramène à la résolution du système linéaire $n \times n$ homogène :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{11}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

où les inconnues sont les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ et où les données sont les coefficients $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, de la matrice A ainsi que la valeur propre λ que l'on a calculée au préalable. Bien évidemment, un tel système n'est pas de Cramer puisque son déterminant est nul (son rang est ainsi strictement inférieur au nombre d'équations). Il est en revanche compatible (car homogène), ce qui signifie qu'il possède des solutions autres que la solution nulle.

1.3.4 Illustration avec un exemple

Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f de E, avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, dont la matrice associée relativement à $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà vérifié que $Sp(A) = \{-1, 2\}$ et que -1 est valeur propre simple et 2 valeur propre double

Détermination du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = -1$

Puisque la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est simple, son sous-espace propre E_{λ_1}, est nécessairement de dimension égale à 1. Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un vecteur de E_{λ_1}, rapporté à la base $\mathcal{B}$, et X la matrice-colonne formée des coordonnées x_1, x_2, x_3 . On doit résoudre $(A - (-l)I_3)X = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les scalaires x_1, x_2 et x_3 vérifient le système linéaire 3×3 homogène suivant :

$$(S) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, ce système est équivalent au système échelonné suivant :

$$(S') \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ 3x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

Son rang est égal à 2. Ainsi, $rg(A - (-1)I_3) = 2$, d'où $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 3 - 2 = 1$.
On retrouve bien que le sous-espace propre E_{λ_1}, est de dimension égale à 1.
En éliminant dans le système (S') l a dernière équation et en faisant passer aux seconds membres les termes comportant l'unique inconnue non principale x_3 , on se ramène au système suivant (contrairement au système (S), le système $(S")$ est de Cramer) :

$$(S') \begin{cases} 2x_1 - x_2 & = & x_3 \\ 3x_2 & = & 3x_3 \end{cases}$$

On obtient $x_1 = x_3$ et $x_2 = x_3$. Ainsi, un vecteur propre $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ de A associé à λ_1 s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Finalement, un vecteur propre x de f associé à λ_1 s'écrit sous la forme

$$x = x_3e_1 + x_3e_2 + x_3e_3 \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}.$$

On obtient le vecteur propre $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ en choisissant $x_3 = 1$. Le sousespace propre associé est une droite vectorielle. Il est donné par $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}u_1$.

Détermination du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 2$

La valeur propre $\lambda_2 = 2$ est une valeur propre multiple d'ordre 2. On sait donc que $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$ ou 2. Un vecteur propre de A vérifie $(A - 2I_3)X = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De manière évidente, $rg(A-2I_3) = 1$, d'où $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 3-1 = 2$. Les trois équations du système sont identiques. On se ramène à une seule équation à trois inconnues, qui se résout en fixant deux des trois variables et en résolvant par rapport à la variable restante. En fixant x_2 et x_3 on voit que la solution de l'équation

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

est $x_1 = -(x_2 + x_3)$. Ainsi, un vecteur propre X de A associé à λ_2 s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ avec } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Un vecteur propre x de f associé à λ_2 s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x &= -(x_2 + x_3)e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \\ &= x_2(-e_1 + e_2) + x_3(-e_1 + e_3) \quad avec \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ce qui montre que les deux vecteurs $-e_1 + e_2$ (correspondant à $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$) et $-e_1 + e_3$ (correspondant à $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$) engendrent E_{λ_2}. Ces deux vecteurs forment une base de E_{λ_2} car le sous-espace E_{λ_2} est de dimension 2. En choisissant $x_2 = 0$ et $x_3 = -1$ d'une part, et $x_2 = 1$ et $x_3 = -1$ d'autre part , on obtient les deux vecteurs propres $u_2 = e_1 - e_3$ et $u_3 = e_2 - e_3$. Ces deux vecteurs forment aussi une base de E_{λ_2}. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est donc un plan vectoriel. Il est donné par

$$E_{\lambda_2} = vect(u_2, u_3)$$

. Pour faire la transition avec le paragraphe suivant, on remarque que

$$\underbrace{dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1})}_{=1} + \underbrace{dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2})}_{=2} = \underbrace{dim_{\mathbb{R}}(E)}_{=3}$$

Puisque $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on en déduit que les deux sous-espaces sont supplémentaires dans E, ce qu'on écrit $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

1.4 Exercices

Exercice 1.1. *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = Id_E$.*

$\sim$ *Déterminer les valeurs propres de s.*

Solution d'exercice 1.1.

$$\begin{aligned}
(\lambda \in \mathbb{K} \textit{ valeur prope de } s) &\Longrightarrow \exists u \in E \setminus \{O_E\} : s(u) = \lambda u \\
&\Longrightarrow s(s(u)) = s(\lambda u) && \textit{car } s \textit{ est une application} \\
&\Longrightarrow s \circ s(u) = \lambda s(u) && \textit{car } s \textit{ est linéaire} \\
&\Longrightarrow u = \lambda^2 u && \textit{car } s \circ s = Id_E \\
&\Longrightarrow (\lambda^2 - 1)u = O_E
\end{aligned}$$

Utilisons le fait que $u \neq O_E$ cela nous donne $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1,$ ou $\lambda = 1$.
d'où $Sp(s) = \{-1, 1\}$

Exercice 1.2. *Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient D et I deux endomorphismes de E définis, pour $f \in E$, par :*

$$D(f) = f' \text{ et } I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de D et I.*
2. *Déterminer les valeurs propres de $D \circ I$ et $I \circ D$.*

Solution d'exercice 1.2.

Valeurs propres de D

$$\begin{aligned}(\lambda \in \mathbb{R} \text{ valeur propre de } D\ ) &\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} | D(f) = \lambda f.\\ &\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} | f' = \lambda f.\end{aligned}$$

On remarque que tout applaication de la forme $x \mapsto \alpha e^{\lambda x}$, est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $(\alpha e^{\lambda x}) = \lambda(\alpha e^{\lambda x})$
Alors $Sp(D) = \mathbb{R}$.

Sous-espace propre de D

$E_\lambda = \{f \in E | D(f) = \lambda f\} = \{\alpha e^{\lambda x} | \alpha \in \mathbb{R}\}$

Valeurs propres de I

$$\begin{aligned}(\lambda \in \mathbb{R} \text{ valeur propre de } I\ ) &\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} |\ I(f) = \lambda f.\\ &\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} |\ f = \lambda f'(\text{ par dérivation}).\\ &\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} |\ F = \lambda F'.\end{aligned}$$

$-$Si $\lambda = 0$ alors $f = 0_E$ (Contraduction)

$$\begin{aligned}-Si\ \lambda \neq 0\ v\ p\ de\ I &\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} |\ F = \lambda F'\\ &\Longrightarrow F'(x) = \tfrac{1}{\lambda} F(x) \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}\ tq\ F(x) = Ce^{\frac{1}{\lambda}x}\\ &\Longrightarrow F(0) = CCe^{\frac{1}{\lambda}0} \Rightarrow C = 0\\ &\Longrightarrow F(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = F'(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ (Contraduction)\end{aligned}$$

Donc $Sp(I) = \emptyset$

Valeurs propres de $D \circ I$

$$\begin{aligned}
(D \circ I) &= D(I(f(x))) \\
&= D(x \mapsto \int_0^x f(t)dt) \\
&= D(F(x) - F(0)) \quad D(F(0)) = 0 \\
&= f(x) \\
D \circ I &= Id
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda \ v \ p \ de \ D \circ I) &\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} | (D \circ I)(f) = Id(f) = \lambda f \\
&\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} | f = \lambda f \\
&\Longrightarrow \lambda = 1
\end{aligned}$$

Donc $Sp(D \circ I) = \{1\}$ *et* $E_1 = E$

Valeurs propres de $I \circ D$

$$\begin{aligned}
(I \circ D)(f) &= I(D(f)) \\
&= I(f') \\
&= \int_0^x f'(t)dt \\
&= f(x) - f(0) \\
(I \circ D)(f) &= f - f(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \ v \ p \ de \ D \circ I &\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} | (I \circ D)(f) = \lambda f \\
&\Longrightarrow \exists f \in E \setminus \{O_E\} | f(x) - f(0) = \lambda f(x) \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow (1 - \lambda) f(x) = f(0) \ pour \ trouver \ constante \ \lambda onremplacex = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda f(0) = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda = 0 \ ou \ f(0) = 0
\end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$ *alors* $f = f(0)$
donc $\lambda = 0$ *v.p. et* $E_0 = \{f = c | c \in \mathbb{R}\}$
Si $\lambda \neq 0$ *donc* $f(0) = 0 \Rightarrow f = \lambda f \Rightarrow \lambda = 1$
Donc $\lambda = 1$ *v.p. et* $E_1 = \{f | f(0) = 0\}$

Exercice 1.3. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel de dimension finie et* f *un endomorphisme de* E*.*

$\sim$ *Montrer que :* $0 \notin S_p(f) \Longleftrightarrow f$ *surjective.*

Solution d'exercice 1.3. *Pour montrer l'équivalence suivante*

$$0 \notin S_p(f) \Longleftrightarrow f \text{ surjective.}$$

Il suffit de démontrer l'équivalence

$$0 \in S_p(f) \Longleftrightarrow f \text{ n'est pas surjective.}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } 0 \in S_p(f) &\Longleftrightarrow \exists u \neq 0_E \text{ tq } f(u) = 0u = 0_E \\ &\Longleftrightarrow \ker f \neq \{0_E\} \\ &\Longleftrightarrow f \text{ n'est pas injective} \\ &\Longleftrightarrow f \text{ n'est pas surjective car } f \in \mathcal{L}(E) \text{ de dimension finie} \end{aligned}$$

Exercice 1.4. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}(X)$ défini par $f(P) = (X-1)P$.*

$\sim$ *Montrer que f n'a pas des valeurs propres.*

Solution d'exercice 1.4. *Supposons qu'il existe des valeurs propres de f i.e.*

$$\begin{aligned} \exists P \neq 0_{\mathbb{C}(X)} | f(P) = \lambda P &\Longrightarrow (X-1)P = \lambda P \\ &\Longrightarrow deg(\lambda P) = deg(P) + 1 \text{ (Contraduction car)} \end{aligned}$$

$$deg(\lambda P) = \begin{cases} -\infty & si\ \lambda = 0 \\ deg(P) & si\ \lambda \neq 0 \end{cases} \text{ d'une part}$$

$$\text{d'autre part} \begin{cases} -\infty & = deg(P) + 1 \\ deg(P) & = deg(P) + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P = 0_{\mathbb{C}(X)} \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \text{Contraduction}$$

Donc f n'a pas des valeurs propres.

Exercice 1.5. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à zéro, f un endomorphisme nilpotent de E (c-à-d $\exists n \in \mathbb{N} / f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$).*

$\sim$ *Déterminer les valeurs propres de f et leurs sous espace propres associés.*

Solution d'exercice 1.5.

Valeurs prpres de f

$$\lambda \text{ v.p. de } f \Longleftrightarrow \exists u \neq 0_E \text{ tq } f(u) = \lambda u$$

$$\begin{aligned} On\ a\ f(u) = \lambda u &\Longrightarrow f^2(u) = f(\lambda u) \\ &\Longrightarrow f^2(u) = \lambda f(u) \\ &\Longrightarrow f^2(u) = \lambda^2 u \\ &\quad\ \vdots \\ &\Longrightarrow f^n(u) = \lambda^n u \\ &\Longrightarrow 0_{\mathcal{L}(E)} = \lambda^n u \ puisque\ u \neq 0_E \\ &\Longrightarrow \lambda^n = 0_{\mathbb{K}} \\ &\Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

Donc $Sp(f) = \{0\}$

Sous espace propre de f

$E_0 = \ker f$

Exercice 1.6. *Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inferieur ou égal à* 2 *et f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = (2X+1)P' - (X^2-1)P$".*

$\sim$ *Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.*

Solution d'exercice 1.6.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X]/deg(P) \leq 2\}$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)/f(P) = (2X+1)P' - (X^2-1)P"$ *et soit* $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ *une base de E et A la matrice associé à f relativement à $\mathcal{B}$.* *i.e. On calculons* $f(1), f(X), f(X^2)$ *en fonction de* $\{1, X, X^2\}$ *on trouve*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Alors $Sp(f) = \{0, 2\}$ *telle que* 0 *valeur propre simple et* 2 *valeur propre douvle.*

Sous espace propre associé à $\lambda = 0$

$E_0(f) = \left\{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 / f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$

$$\begin{aligned} f(a_0 + a_1X + a_2X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} &\Longrightarrow (2X+1)(a_1 + 2a_2X) - 2a_2(X^2-1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Longrightarrow 2a_2X^2 + (2a_1 + 2a_2)X + a_1 + 2a_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_0(f) &= \{a_0 \times 1, a_0 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}_0[X] \end{aligned}$$

Sous espace propre associé à $\lambda = 2$

$E_2(f) = \{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 / f(P) = 2P\}$

$$\begin{aligned} f(a_0 + a_1X + a_2X^2) = 2P &\Longrightarrow 2a_2X^2 + (2a_1 + 2a_2)X + a_1 + 2a_2 = 2a_0 + 2a_1X + 2a_2X^2 \\ &\Longrightarrow 2a_2X + a_1 + 2a_2 - 2a_0 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - 2a_0 = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 2a_0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_2(f) &= \{a_0 + 2a_0X / a_0 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0(1+2X) / a_0 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Exercice 1.7. *Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ vérifiant $f \circ f \circ f = Id_E$. Soit $j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

$\sim$ *Montrer que $E = ker(f - Id_E) \oplus ker(f - jId_E) \oplus ker(f - j^2Id_E)$.*

Solution d'exercice 1.7. *La méthode utilisée consiste à montrer que tout vecteur x de E peut s'écrire de manière unique sous la forme : $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_1 \in Ker(f - id_E)$, $x_2 \in Ker(f - jid_E)$ et $x_3 \in Ker(f - j^2id_E)$. Supposons dans un premier* *temps que ces trois vecteurs x_1, x_2, x_3 existent. On a alors :*

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = jx_2, \quad f(x_3) = j^2 x_3.$$

Les vecteurs x_1, x_2, x_3 vérifient nécessairement :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & x \\ x_1 + jx_2 + j^2 x_3 & = & f(x) \\ x_1 + j^2 x_2 + jx_3 & = & f^2(x) \end{cases}$$

où la deuxième (respectivement la troisième) égalité a été obtenue en composant la première égalité par f (respectivement par f^2) et en tenant compte que $j^3 = 1$. En additionnant les trois égalités et en tenant compte du fait que $1 + j + j^2 = 0$, on obtient :

$$x_1 = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x)).$$

En multipliant la première égalité par j^2, la deuxième par j, en laissant inchangée la troisième, en additionnant le tout, et en tenant compte du fait que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$, on obtient : $3j^2 x_2 = j^2 x + jf(x) + f^2(x)$, d'où , en multipliant par $j/3$:

$$x_2 = \frac{1}{3}(x + j^2 f(x) + jf^2(x)).$$

De même, en multipliant la première égalité par j^2, la troisième par j, en laissant inchangée la deuxième, en additionnant le tout, et en tenant compte du fait que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$, on obtient : $3j^2 x_3 = j^2 x + f(x) + jf^2(x)$, d'où, en multipliant par $j/3$:

$$x_3 = \frac{1}{3}(x + jf(x) + j^2 f^2(x)).$$

Les trois vecteurs x_1, x_2, x_3 ainsi calculés sont les seules solutions (si elles existent!) possibles (l'unicité de l'écriture implique l'unicité de ces solutions).
Pour que notre raisonnement soit complet, il reste à vérifier que x_1 appartient à $Ker(f - id_E)$, que x_2 appartient à $Ker(f - jid_E)$, que x_3 appartient à $Ker(f - j^2 id_E)$

et que $x = x_1 + x_2 + x_3$. Cette dernière égalité est bien évidemment vérifiée puisque c'est une des trois équations du système. De plus, on vérifie que

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) + f^3(x)) \\ & = & \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) + x) \\ & = & x_1 \end{array}$$

où on a utilisé $f^3(x) = x$ puisque $f^3 = id_E$, ce qui montre que le vecteur x_1 appartient à $Ker(f - id_E)$. On vérifie de même que le vecteur x_2 appartient à $Ker(f - jid_E)$ puisque

$$\begin{array}{rcl} f(x_2) & = & \frac{1}{3}(f(x) + j^2 f^2(x) + jf^3(x)) \\ & = & \frac{1}{3}(f(x) + j^2 f^2(x) + jx) \\ & = & jx_2 \end{array}$$

et enfin que le vecteur x_3 appartient à $Ker(f - j^2 id_E)$ puisque

$$\begin{array}{rcl} f(x_3) & = & \frac{1}{3}(f(x) + jf^2(x) + j^2 f^3(x)) \\ & = & \frac{1}{3}(f(x) + jf^2(x) + j^2 x) \\ & = & j^2 x_3 \end{array}$$

Exercice 1.8. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; une matrice carrée d'ordre n, différent de λI_n qui admet une seul valeur propre de multiplicité n.*

$\sim$ *Montrer que A n'est pas diagonalisable*

Solution d'exercice 1.8. *Supposons que $A \neq \lambda I_n$ est diagonalisable i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \lambda I_n$ tq $A = PDP^{-1}$*

$$\begin{array}{rcl} \text{On a } A = PDP^{-1} & \Longrightarrow & A = P\lambda I_n P^{-1} \\ & \Longrightarrow & A = \lambda P I_n P^{-1} \\ & \Longrightarrow & A = \lambda P P^{-1} \\ & \Longrightarrow & A = \lambda I_n \ (\textit{Contraduction}) \end{array}$$

Chapitre 2

Diagonalisation d'un endomorphisme

2.1 Diagonalisation d'un endomorphisme

Comme nous l'avons, tous les endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'admettent pas nécessairement de valeurs propres (et donc de vecteurs propres). Cependant, s'ils existent, les vecteurs propres d'un endomorphisme f associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre dans l'espace E. Cela fait d'une famille de vecteurs propres un « bon candidat » pour constituer une base de E puisque, pour être une base, il ne lui reste plus qu 'à être génératrice de l'espace E tout entier. Et si c'est le cas, on dira que f est diagonalisable.

Définition 2.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie ou infinie. Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s 'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f. Diagonaliser f, c 'est trouver une telle base.*

Quel intérêt avons-nous à diagonaliser un endomorphisme ?
Plaçons-nous maintenant dans le cas d 'un espace vectoriel E de dimension n et considérons un endomorphisme f de E. Supposons f diagonalisable. D'après la définition (2.1.1), cela signifie qu'il existe une base notée $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ constituée de vecteurs propres de f. Écrivons la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$. Par

définition, son $j^{ième}$ vecteur-colonne est constitué des coordonnées de $f(u_j)$ dans $\mathcal{C}$. Or, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des vecteurs propres de f. Il existe donc n valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités et notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (elles appartiennent toutes à $\mathbb{K}$) telles que

$$f(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad f(u_2) = \lambda_2 u_2, \cdots, f(u_n) = \lambda_n u_n,$$

On en déduit alors :

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} f(u_1) f(u_2) \cdots f(u_p) \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array}$$

C'est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres (distinctes ou confondues) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de f. On la note aussi :

$$diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P.$$

Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$ est ainsi semblable à une matrice diagonale.
En résumé, si un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ alors sa matrice associée dans la base formée de ses vecteurs propres est diagonale et toute matrice associée à f relativement à une base (quelconque) de E est semblable à une matrice diagonale.
On a la définition suivante.

Définition 2.1.2. *Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, c 'est-à- dire s'il existe une matrice inversible P d'ordre n sur $\mathbb{K}$, et s 'il existe une matrice diagonale D d'ordre n sur $\mathbb{K}$, telles que*

$$D = P^{-1} A P$$

Diagonaliser A, c'est trouver D .

Dire qu'une matrice rectangulaire est diagonalisable n'a pas de sens ! Il faut qu'elle soit carrée. Comme le montre l'exemple qui suit, la manière de diagonaliser une matrice (qui est diagonalisable) n'est pas unique.

Exemple Soient la matrice carrée A appartenant à $M_3(\mathbb{R})$ et les trois vecteurs colonnes U_1, U_2 et U_3 appartenant à $M_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a déjà vérifié que U_1 est un vecteur propre de A associé à $\lambda_1 = -1$ et que U_2, U_3 sont deux vecteurs propres de A associés à $\lambda_2 = 2$. Considérons les trois matrices P, Q et R d e $GL_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert \\ U_2 & U_1 & U_3 \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert \\ U_2 & U_3 & U_1 \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

On vérifie alors les trois égalités matricielles suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=diag(-1,2,2)} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=P},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=diag(2,-1,2)} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=Q^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=Q},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=diag(2,2,-1)} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=R^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=R},$$

Remarque Soit A une matrice d'ordre n sur K. Supposons A diagonalisable. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ désignent les valeurs propres de A, distinctes deux à deux et de multiplicités respectives $h1, \dots, h_m$, alors, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, la valeur propre λ_i est présente h_i fois sur la diagonale principale de la matrice D. Le rang de A est alors égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leurs multiplicités). De plus, puisque A et D sont semblables, $det(D) = det(A)$. Par conséquent,

$$det(A) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{h_i} = \underbrace{(\lambda_1 \times \dots \times \lambda_1)}_{h_1 fois} \times \dots \times \underbrace{(\lambda_m \times \dots \times \lambda_m)}_{h_m fois}.$$

Puisque A et D sont semblables, $Tr(D) = Tr(A)$. Ainsi,

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{m} h_i \lambda_i = \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_1)}_{h_1 fois} + \dots + \underbrace{(\lambda_m + \dots + \lambda_m)}_{h_m fois}.$$

2.2 Caractérisation de la diagonalisation en dimension finie

Proposition 2.2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$- espace de dimension finie et f un endomorphisme de E. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_m}$ les sous-espaces propres correspondants. Une condition nécessaire et suffisante pour que*

f soit diagonalisable est que

$$\dim_{\mathbb{K}} E_{\lambda_1} + \ldots + \dim_{\mathbb{K}} E_{\lambda_m} = \dim_{\mathbb{K}}(E)$$

Démonstration :

✓ Soient $n_i = dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_i})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $n = dim_{\mathbb{K}}(E)$. Supposons f diagonalisable et montrons que $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$.

Puisque f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{C}$ de vecteurs propres de f. La matrice associée à f dans cette base est diagonale. On s'en sert pour calculer le polynôme caractéristique P_f. En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes, de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_f(\lambda) = det(Mat_{\mathcal{C}}(f) - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{h_i},$$

d 'où $h_1 + h_2 + \cdots + h_m = n$ puisque P_f est un polynôme de degré n. Il est alors suffisant de montrer que $n_i = h_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ car de l'égalité $h_1 + h_2 + \cdots + h_m = n$, on pourra en déduire l'égalité recherchée :

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$$

– Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, les vecteurs propres de $\mathcal{C}$ correspondant à la valeur propre λ_i (il y en a h_i) forment une famille libre. On a donc nécessairement :

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad n_i \geq h_i \tag{2.1}$$

– D'après la proposition 1.3.2, la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre à laquelle il est associé. On a donc aussi :

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad n_i \leq h_i \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2) on déduit que $n_i = h_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

✓ Montrons à présent la réciproque. Supposons que $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ et montrons que f est diagonalisable. On extrait une base de chacun des sousespaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$. Soient

$$\mathcal{C}_1 = (u_i^{(1)})_{1 \leq i \leq n_1}, \quad \mathcal{C}_2 = (u_i^{(2)})_{1 \leq i \leq n_2}, \ldots, \quad \mathcal{C}_m = (u_i^{(m)})_{1 \leq i \leq n_m}$$

des bases respectives des sous-espaces $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$. Tous les vecteurs appartenant à ces bases sont des vecteurs propres. On considère la famille $\mathcal{C}$ que l'on obtient en réunissant l'ensemble des m bases $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m$:

$$\mathcal{C} = (\underbrace{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_{n_1}^{(1)}}_{\in E_{\lambda_1}}, \underbrace{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_{n_2}^{(2)}}_{\in E_{\lambda_2}}, \ldots, \underbrace{u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, \ldots, u_{n_m}^{(m)}}_{\in E_{\lambda_m}})$$

C'est une famille libre dans E. Nous avons déjà vérifié ce point au paragraphe 1.2.1 (c'est une conséquence de la proposition 1.2.1). Or, $card(\mathcal{C}) = card(\mathcal{C}_1) + card(\mathcal{C}_2) + \ldots + card(\mathcal{C}_m) = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. En tenant compte de notre hypothèse $(n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n)$, on obtient $card(\mathcal{C}) = n$. Puisque toute famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base, la famille (de vecteurs propres) $\mathcal{C}$ ainsi construite est effectivement une base de E ; cela termine la démonstration

Remarque Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E soit diagonalisable est que l'espace E soit somme directe des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$:

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}.$$

On déduit immédiatement de la proposition 2.2.1 une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Corollaire 2.2.1. *Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension n. Si un endomorphisme f de E possède exactement n valeurs propres distinctes deux à deux, alors f est diagonalisable*

Démonstration Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Supposons les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distinctes deux à deux. Ce sont donc nécessairement des valeurs propres simples de f et, d'après la proposition 1.3.2, la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1. On a ainsi :

$$\underbrace{dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_1})}_{=1} + \underbrace{dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_2})}_{=1} + \ldots + \underbrace{dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_n})}_{=1} = \underbrace{dim_{\mathbb{K}}(E)}_{=n},$$

et, d'après la proposition 2.2.1, cela nous permet de conclure que f est diagonalisable.

Comme l'illustre le deuxième exemple ci-après, la condition donnée dans le corollaire 2.2.1 est suffisante mais non nécessaire.

Exemples

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

La matrice A possède ainsi une valeur propre simple ($\lambda_1 = 3$; on a donc $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 1$) et une valeur propre double ($\lambda_2 = 2$). On vérifie facilement que $E_{\lambda_1} = Vect((l,1,-2))$ et $E_{\lambda_2} = Vect((l,0,0))$ où nous nous sommes placés dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On a donc $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$. La matrice A n'est pas diagonalisable car

$$dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) + dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 2 \neq dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$$

2. Reprenons l'exemple de la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ (valeur propre simple) et $\lambda_2 = 2$ (valeur propre double) et $E_{\lambda_1} = Vect((l,1,1))$ et $E_{\lambda_2} = Vect((l,0,-1),(0,1,-1))$. Nous nous sommes encore placés dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Cette matrice est diagonalisable (nous l'avons d'ailleurs diagonalisée suivant trois manières différentes dans un exemple précédent) car

$$dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) + dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1 + 2 = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$$

.

On utilise aussi souvent la caractérisation suivante.

Corollaire 2.2.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n et f un endomorphisme de E . Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$ et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$ les sous-espaces propres correspondants. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable est que*

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n \\ \forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_i}) = h_i \end{cases}$$

Tout endomorphisme est-il diagonalisable ?

On se convainc facilement que la réponse à cette question est « non ». En effet, d'après le corollaire 2.2.2, pour qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. le nombre de ses valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) est égal à la dimension de E ;
2. la dimension de chacun des sous-espaces propres est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Il existe des endomorphismes pour lesquels l'une ou l'autre de ces deux conditions (ou les deux à la fois) n'est pas vérifiée (voir l'exemple précédent). Néanmoins, nous pouvons remarquer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors la première condition (celle portant sur le nombre de valeurs propres) est automatiquement vérifiée puisque tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. L'obstruction à la diagonalisation d'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ne pourra apparaître que si la deuxième condition (celle portant sur la dimension des sous-espaces propres) n'est pas vérifiée.

Il est intéressant de noter que certaines catégories d'endomorphismes ne sont jamais diagonalisables. C'est le cas des endomorphismes nilpotents, à l'exception de l'application nulle. Ce point est développé ci-après.

2.2.1 Endomorphisme nilpotent

Proposition 2.2.2. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Supposons f non identiquement nul. Si f est nilpotent alors f n'est pas* *diagonalisable.*

Démonstration Utilisons un raisonnement par contraposée. Supposons f à la fois nilpotent et diagonalisable et déduisons-en que f est identiquement nul. Soient $n = dim_{\mathbb{K}}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons $N \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$. D'après notre hypothèse, N est à la fois nilpotente et diagonalisable. Puisqu'elle est diagonalisable, il existe une matrice inversible P d'ordre n sur $\mathbb{K}$ telle que

$$D = P^{-1}NP$$

avec $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ · Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (distinctes ou confondues) de N. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient :

$$N = PDP^{-1}$$

et on montre (par récurrence sur l'entier k) que $N^k = PD^kP^{-l}$ ou encore $D^k = P^{-l}N^kP$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque N est nilpotente, $N^p = 0$ pour un certain entier p non nul. Il vient alors que $D^p = 0$, autrement dit que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. La matrice diagonale D est donc nulle. On en déduit que la matrice N est nulle, ou, de manière équivalente, que l'endomorphisme f est identiquement nul.

2.2.2 Théorème de Cayley -Hamilton

Ce théorème a une grande importance dans le calcul matriciel, il autorise des simplifications puissantes dans les calculs de matrices comme la puissance d'une matrice, il permet d'établir des résultats théoriques, par exemple pour calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent, comme il permet de calculer l'inverse d'une matrice.

Théorème 2.2.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Soit*

$$P_f(\lambda) = det(f - \lambda Id_E)$$

le polynôme caractéristique de f. Alors l'endomorphisme $P_f(f)$ est nul.

Démonstration :

Notons n la dimension de E. Supposons dans un premier temps qu'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que les n vecteurs :

$$x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)$$

soient linéairement indépendants. Ils forment alors une base de E, et le vecteur $f^n(x)$ peut être écrit :

$$f^n(x) = a_0x + a_1f(x) + a_2f^2(x) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x)$$

On pose $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} - X^n$, et on a $P(f)(x) = 0$.
La matrice de f dans la base $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x)$ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

puisque $x \mapsto f(x), f(x) \mapsto f^2(x), etc \dots f^{n-1}(x) \mapsto f^n(x) = a_0x + a_1f(x) + a_2f^2(x) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x)$. On a donc :

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Les lignes de cette dernière matrice étant nomées $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$, ajoutons à la première ligne la combinaison linéaire suivante des autres lignes :$\lambda L_1 + \lambda^2 L_2 + \ldots + \lambda^{n-1} L_{n-1}$. Ceci ne change pas le déterminant, et la première ligne de la matrice devient :

$$0 \; 0 \; \cdots \; 0 \; 0 \; P(\lambda)$$

En développant le déterminant par rapport à la première ligne on obtient :

$$P_f(\lambda) = \pm P(\lambda)$$

Or, on sait que $P(f)(x) = 0$. Par ailleurs, comme les endomorphismes $P(f)$ et f^i commutent, on a :

$$P(f)(f^i(x)) = f^i(P(f)(x)) = f^i(0) = 0$$

ce qui donne $P(f) = 0$, donc $P_f(f) = 0$.
On a fait au début l'hypothèse que les vecteurs $x, f(x), f^2(x), \ldots$ engendrent E. Passons-nous maintenant de cette hypothèse. Si $E = 0$ le théorème est trivial. Sinon, il existe un vecteur non nul x dans E. Soit k le plus grand entier tel que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x))$ soit un système libre. Cet entier existe car E est de dimension finie, et il est au moins égal à 1. De plus $f^k(x)$ est combinaison linéaire de $x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)$.
Notons F le sous-espace de E engendre par les vecteurs $x, f(x), \ldots, f^{k.1}(x)$. Ce sous-espace est stable par f. Notons $f_1 : F \to F$ la restriction de f à F. Si on complete le systeme libre $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k.1}(x))$ en une base de E, la matrice de f dans cette base prend la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où A est un bloc carré $k \times k$ et B un bloc carré $(n-k) \times (n-k)$. Soustrayons $\lambda.Id$ à cette matrice et prenons le déterminant. On obtient (calcul du déterminant par blocs) :

$$P_f(\lambda) = P_{f_1}(\lambda) Q(\lambda)$$

pour un certain polynôme Q.
D'après la première partie de la démonstration, on a $P_{f_1}(f_1)(x) = 0$. Mais comme f_1 est la restriction de f, on a aussi $P_{f_1}(f)(x) = 0$, donc $P_f(f)(x) = Q(f)(P_{f_1}(f)(x)) = 0$. Comme ceci est valable pour tout vecteur non nul x, on a $P_f(f) = 0$.

2.2.3 Décomposition de Dunford

L'importance de l'étude des endomorphismes nilpotents apparaît clairement dans la proposition suivante que nous admettons.

Proposition 2.2.3. ***(Décomposition de Dunford)***
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (ce qui est toujours le cas lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors il existe un unique couple (g, h) d'endomorphismes de E tel que

$$f = g + h \text{ et } g \circ h = h \circ g$$

avec g diagonalisable et h nilpotent. Cette décomposition est connue sous le nom de décomposition de Dunford.

Les deux endomorphismes g et h sont définis à partir de f. L'endomorphisme g (respectivement h) est appelé partie diagonalisable (resp. partie nilpotente) de f. Il est à noter que lorsque le corps de référence est $\mathbb{C}$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable est que sa partie nilpotente soit l'endomorphisme nul.
Exemple Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La partie diagonalisable g et la partie nilpotente h de f sont les endomorphismes dont les matrices respectives dans la base canonique sont G et H avec

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous verrons ultérieurement suivant quelle méthode nous avons obtenu les expressions des deux matrices G et H. Nous pouvons néanmoins vérifier les points suivants.

1. La matrice A se décompose comme la somme des deux matrices G et H, c'est-à-dire : $A = G + H$.
2. Déterminons le polynôme caractéristique de G. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ En développant par rapport à la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda(\lambda-1)} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}}_{=-2(\lambda-1)} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}_{=4(\lambda-1)}$$

Ainsi, le polynôme caractéristique de G s'écrit , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_G(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

L a matrice G possède une valeur propre double ($\lambda_1 = 1$) e t une valeur propre simple ($\lambda_2 = 2$) . Elle est diagonalisable puisque $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 2$ et $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$.

1. La matrice H est nilpotente puisque $H^2 = 0$.
2. Le produit des deux matrices G et H est commutif : $G \times H = H \times G$.

2.3 Exercices

Exercice 2.1. *Soient α un réel et T_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], T_\alpha(P) = X(X-1)P" + (1+\alpha X)P'.$$

1. *Ecrire la matrice associée à T_α relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.*

2. *Déterminer les valeurs propres de T_α. Pour quelle(s) valeur(s) de α a-t-on des valeurs propres multiples ?*

3. *Pour quelle(s) valeur(s) de α l'endomorphisme T_α est -il diagonalisable ?*

Solution d'exercice 2.1. *1. Notons $\mathcal{B}_c = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. la matrice associée à l'endomorphisme T_α relativement à $\mathcal{B}_c$, que nous décidons de noter M_α s'écrit :*

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\alpha) \end{pmatrix}$$

Car $T_\alpha(1) = 0, T_\alpha(X) = 1 + \alpha X$ et $T_\alpha(X^2) = 2(1+\alpha)X^2$.
2. La matrice M_α est tringulaire supérieure. Les valeurs propres d'une matrices tringulaire (supérieure ou inférieure) se trouvant sur la diagonale de la matrice, les valeures propres de M_α, et donc de T_α, sont les réels

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \alpha \quad et \quad \lambda_3 = 2(1+\alpha)$$

Bien évidemment, ces trois valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes les une des autres et l'étude de leurs multiplicité nécessiare une discussion sur la valeur de α. Tout d'abord, remarquons que le cas où les trois valeurs propres sont égales est impossible. Ainsi, $T_\alpha$ne peut pas posséder de valeur propre triple. Examinons à présent pour quelle(s) valeur(s) de α l'endomorphisme T_α possède une valeur propre double. Cela ne peut arriver que lorsque, parmi les trois valeurs propres, deus sont identique, ce qui conduit à considérer les trois ca suivants.

- *Cas $\lambda_1 = \lambda_2$: $\alpha = 0$ d'où $\lambda_3 = 2$. Les valeurs propres de $T_{\alpha=0}$ sont 0 (valeur propre double) et 2 (valeur propre simple).*
- *Cas $\lambda_1 = \lambda_3$: $\alpha = -1$ d'où $\lambda_2 = -1$. Les valeurs propres de $T_{\alpha=-1}$ sont 0 (valeur propre double) et -1 (valeur propre simple).*
- *Cas $\lambda_2 = \lambda_3$: $\alpha = -2$. Les valeurs propres de $T_{\alpha=-2}$ sont 0 (valeur propre simple) et -2 (valeur propre double).*

En résumé, T_α possède une valeur propre double et une valeur propre simple lorsque $\alpha \in \{0, -1, -2\}$.

Il possède en revanche trois valeurs propres simples lorsque $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2\}$.

3. Si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2\}$ *alors* T_α *est diagonalisable car ses trois valeurs propres* $0,\ \alpha,\ 2(1+\alpha)$ *sont simple. En revanche, si* $\alpha \in \{0, -1, -2\}$ *alors* T_α *n'est pas nécessairement diagonalisable car il possède une valeur propre double (la dimension du sous-espace propre associé pouvent être égale à 1 ou 2). L'endomorphisme* T_α *est diagonalisable si et seulement si, la dimension du sous-espace associé à la valeur propre double est égale 2. Rappelons la relation suivante :*

$$dim_{\mathbb{R}}(E_\lambda) = \underbrace{dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X])}_{=3} - rg(M_\alpha - \lambda I_3)$$

Où I_3 *est la matrice identité d'ordre 3 et où* E_λ *désigne le sous-espace propre associé à une valeur propre* λ *de* T_α*. considérons les trois cas suivants.*

– *Supposons* $\alpha = 0$*. La valeur propre double est* 0*. On a :*

$$M_{\alpha=0} - 0I_3 = M_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et $rg(M_{\alpha=0}) = 2$*, d'où :* $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda=0}) = 3 - 2 = 1$*. Donc* $T_{\alpha=0}$ *n'est pas diagonalisable.*

– *Supposons* $\alpha = -1$*. La valeur propre double est encore* 0*. On a :*

$$M_{\alpha=-1} - 0I_3 = M_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $rg(M_{\alpha=-1}) = 1$ *(c'est immédiat), d'où :* $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda=0}) = 3 - 1 = 2$*. Donc* $T_{\alpha=-1}$ *est diagonalisable.*

– *Supposons* $\alpha = -2$*. La valeur propre double est cette fois-ci* -2*. On a :*

$$M_{\alpha=-2} + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient que $rg(M_{\alpha=-2}+2I_3)=1$*, d'où :* $dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda=-2})=3-1=2$*. Donc* $T_{\alpha=-1}$ *est diagonalisable.*

En résumé, la seule valeur de α *pour laquelle l'endomorphisme* T_α *n'est pas diagonalisable est* 0*.*

Exercice 2.2. *On considère l'application* f *définie dans* $\mathbb{C}_2[X]$ *par :*

$$\forall P \in \mathbb{C}_2[X], f(P) = (X^2+1)P' - (2X-1)P.$$

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme de* $\mathbb{C}_2[X]$*.*
2. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de* f *, de deux façons différentes, en utilisant :*
   - $\sim$ *la définition des éléments propres de* f*.*
   - $\sim$ *la matrice de* f *dans la base* $(1, X, X^2)$ *de* $\mathbb{C}_2[X]$*.*
3. *L'endomorphisme* f *est-il diagonalisable ?*

Solution d'exercice 2.2. *1. a) On a, pour tout* $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{C}_2[X]$ *:*

$$\begin{array}{rcl} f(P) & = & (X^2+1)(2aX+b)-(2X-1)(aX^2+bX+c) \\ & = & (a-b)X^2+(2a+b-2c)X+(b+c) \\ & \in & \mathbb{C}_2[X] \end{array}$$

b) On a, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *et tous* $P, Q \in \mathbb{C}_2[X]$ *:*

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha P+\beta Q) & = & (X^2+1)(\alpha P+\beta Q)' - (2X-1)(\alpha P+\beta Q) \\ & = & (X^2+1)(\alpha P'+\beta Q') - (2X-1)(\alpha P+\beta Q) \\ & = & \alpha(X^2+1)P' - \alpha(2X-1)P + \beta(X^2+1)Q' - \beta(2X-1)Q \\ & = & \alpha f(p) + \beta f(Q) \end{array}$$

donc f *est linéaire.*

On conclut que f *est un endomorphisme du* $\mathbb{C}$*-ev* $\mathbb{C}_2[X]$*.*

2. ***Les valeurs propres et les sous-espaces propres de*** f

- Par la définition des éléments propres de f*.*

$\lambda \in \mathbb{C}$ *valeur propre de* $f \iff \exists P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}_2[X] | 0_{\mathbb{C}_2[X]}$ *tq* $f(P) = \lambda P$

On a, en réutilisant le calcul de $f(P)$ *effectué en a) :*

$$\begin{aligned}
f(P) = \lambda P &\iff (a.b)X^2 + (2a+b-2c)X + (b+c) = \lambda(aX^2 + bX + c) \\
&\iff \begin{cases} a - b = \lambda a \\ 2a + b - 2c = \lambda b \\ b + c = \lambda c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-\lambda)a \\ 2a + (1-\lambda)b - 2c = 0 \\ b = (\lambda - 1)c \end{cases} \\
&\iff \left(\begin{cases} \lambda = 1 \\ b = 0 \\ 2a - 2c = 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} c = -a \\ b = (1-\lambda)a \\ 2a + (1-\lambda)^2 a + 2a = 0 \end{cases} \right) \\
&\iff \left(\begin{cases} \lambda = 1 \\ b = 0 \\ a = c \end{cases} ou \begin{cases} (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \\ c = -a \\ b = (1-\lambda)a, \end{cases} \right)
\end{aligned}$$

car, dans le second système, si $a = 0$, *alors* $c = 0$, $b = 0$, *donc* $P = 0$, *exclu. Et :*

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)^2 + 4 = 0 &\iff (1-\lambda)^2 = -4 \\
&\iff (\lambda - 1 = 2i \ ou \ \lambda - 1 = -2i) \\
&\iff (\lambda = 1 + 2i \ ou \ \lambda = 1 - 2i)
\end{aligned}$$

Donc :

$$f(P) = \lambda P \iff \left(\begin{cases} \lambda = 1 \\ b = 0 \\ a = c \end{cases} ou \begin{cases} \lambda = 1 + 2i \\ c = -a \\ b = -2ia \end{cases} ou \begin{cases} \lambda = 1 + 2i \\ c = -a \\ b = -2ia \end{cases} \right)$$

Ainsi, les valeurs propres de f *sont* $1, 1+2i, 1-2i$, *et les sous-espaces propres de* f *sont :* $E_1 = Vect\{1 + X^2\}$, $E_{1+2i} = Vect\{1 + 2iX - X^2\}$ $E_{1-2i} = Vect\{1 - 2iX - X^2\}$
-Par la matrice associée à f *dans la base* $(1, X, X^2)$ *de* $\mathbb{C}_2[X]$ *On calcule les images*

par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$:

$$\begin{cases} f(1) &= -(2X-1) = 1-2X \\ f(X) &= (X^2+1)-(2X-1)X = 1+X-X^2 \\ f(X^2) &= (X^2+1)2X-(2X-1)X^2 = 2X+X^2, \end{cases}$$

d'où la matrice A de f dans $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons les valeurs propres de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

On Calculons $det(A - \lambda I_3)$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I_3) &= (1-\lambda)((1-\lambda)^2+2) - 1(-2(1-\lambda)) \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)^2+4) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I_3) = 0 &\iff \quad 1-\lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2-2\lambda+5=0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 1+2i \text{ ou } \lambda = 1-2i \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont : $1, 1+2i, 1-2i$.

Déterminons les sous-espaces propres de A.

Sous-espace propres de A associé à $\lambda = 1$

$$E_1 = \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / AX = X\}$$

$$AX = X \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x+y = x \\ -2x+y+2z = y \\ -y+z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$Donc\ E_1 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Sous-espace propre de A ***associé à*** $\lambda = 1+2i$

$$E_{1+2i} = \left\{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / AX = (1+2i)X\right\}$$

$$AX = (1+2i)X \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1+2i)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x+y = (1+2i)x \\ -2x+y+2z = (1+2i)y \\ -y+z = (1+2i)z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2ix+y = 0 \\ -2x-2iy+2z = 0 \\ -y-2iz = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2ix \\ z = -x, \end{cases}$$

Donc $E_{1+2i} = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Sous-espace propre de A ***associé à*** $\lambda = 1-2i$

$$E_{1-2i} = \left\{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} /AX = (1-2i)X\right\}$$

$$\begin{aligned}
AX = (1-2i)X \iff & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-2i)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases} x+y = (1-2i)x \\ -2x+y+2z = (1-2i)y \\ -y+z = (1-2i)z \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 2ix+y = 0 \\ -2x+2iy+2z = 0 \\ -y+2iz = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y = -2ix \\ z = -x, \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E_{1-2i} = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

L'endomorphisme f *a les mêmes valeurs propres que* A*, donc les valeurs propres de* f *sont* $1, 1+2i, 1-2i$*. Les vecteurs propres de* A *nous donnent les coordonnées des vecteurs propres de* f *dans la base* $(1, X, X^2)$ *de* $\mathbb{C}_2[X]$ *:* $E_1 = Vect\{1+X^2\}$, $E_{1+2i} = Vect\{1+2iX-X^2\}$ $E_{1-2i} = Vect\{1-2iX-X^2\}$ *3. L'endomorphisme* f *admet trois valeurs propres deux à deux distinctes et* $dim\mathbb{C}_2[X] = 3$*, donc,* f *est diagonalisable.*

Exercice 2.3. *Sans effectuer aucun calcul écrit, dire si les matrices suivantes sont* *diagonalisables :* $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & -3 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Solution d'exercice 2.3. *On a*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

est de rang 1*, puisuqe toutes les colonnes sont propotionnelles à la première, alors* $det(M) = 0$*, donc* 0 *est une valeur propre de* M*. La dimension du sous-espace propre* $E_0(M)$ *est donnée par la formule suivante*

$$dim(E) = dim(E_0) + rg(M) \Longrightarrow dim(E_0) = dim(E) - rg(M) = 3 - 1 = 2$$

Donc 0 *est une valeur propre d'ordre* 2 *ou* 3
Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *les valeurs propres de* A *alors* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(A) = -3$
donc $\lambda_3 = -3$ *et* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
Au bilan final. 0 *est une valeur propre double son sous espace propre de dimension* 2*,* -3 *est une valeur propre simple, son sous espace propre est de dimension* 1
La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à 3*.*
Donc A *est diagonalisable.*

Exercice 2.4. *Soit* A *la matrice suivante :* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de* A*.*
2. *Démontrer que* A *est diagonalisable et déterminer une matrice* D *diagonale et une matrice* P *inversible telles* $A = PDP^{-1}$*.*
3. *Donner en le justifiant, mais sans calcul, le polynôme minimal de* A*.*
4. *Calculer* A^n *pour* $n \in N$ *.*

Solution d'exercice 2.4. *On a* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A s'obtient en calculant le déterminant de $A - \lambda I_3$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(A - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)((4-\lambda)(3-\lambda)) - (4-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(4-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Le polynôme P_A *admet deux racines. Donc la matrice A admet deux valeurs propres* $\lambda_1 = 2$ *(v.p.simple)* $\lambda_2 = 4$ *(v.p. double)*

Le sous-espaces propre associés à $\lambda_1 = 2$ ***noté*** $E_2(A)$

$$E_2(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | AX = 2X \right\}$$

On résoudre alors le système suivant : $\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} \\ \text{Donc} \quad &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} / \right\} \quad dim E_2(A) = 1 \end{aligned}$$

Le sous-espaces propre associés à $\lambda_4 = 2$ ***noté*** $E_4(A)$

$$E_4(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | AX = 4X \right\}$$

On résoudre alors le système suivant : $\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \Longrightarrow \left\{ \; z = -x \right.$

$$\begin{aligned} E_4(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} /x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ Donc \quad &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} /x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / \right\} \end{aligned}$$

puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants alors* $dimE_4(A) = 2$

puisque le Polynôme caractéristique est scindé et les dimensions des sous espaces propres sont égale au multiplicité des valeurs propres correspondantes i.e.
$dimE_2(A) = 1 = mult(\lambda = 2)$ *et* $dimE_4(A) = 2 = mult(\lambda = 4)$
Donc la matrice A est diagonalisable.
Notons la matrice P la matrice de passage telle que les colonnes de cette matrice sont les vecteurs propres $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
D la matrice diagonale telle que les éléments diagonaux sont les valeurs propres

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *telle que* $A = PDP^{-1}$

3. La matrice A est diagonale, donc son polynôme minimal n'a que des racines simple, par ailleurs les racine du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres de A et le polynôme minimal est un polynôme unitaire qui divise le polynôme caractéristique, on a donc $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$

4. ***Calculons*** A^n

On a $A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

où $D^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \frac{1}{detP}{}^t com(P) = -1/2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $A^n = 1/2 \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2.4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$

Exercice 2.5. *Soient deux suites* (x_n) *et* (y_n) *vérifiant :*

$$\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} + 3y_{n-1} \\ y_n = -6x_{n-1} - 4y_{n-1} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que* $U_n = AU_{n-1}$, *où A est une matrice carrée de rang* 2, *qu'on déterminera.*
2. *Montrer que* $U_n = A^nU_0$.
3. *En diagonalisant la matrices A, donner les expressions des termes général des suites* (x_n) *et* (y_n).

Solution d'exercice 2.5. *1. On montre que* $U_n = AU_{n-1}$.

On a $U_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ *car* $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

alors le système devient $U_n = AU_{n-1}$ *telle que* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ *i.e.*

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. On montre $U_n = A^n U_0$.

$$\begin{aligned} U_n &= AU_{n-1} \quad et \;\; U_{n-1} = AU_{n-2} \\ &= A^2 U_{n-2} \\ &= A^3 U_{n-3} \\ &= \vdots \quad\quad par\ réccurence\ on\ trouve \\ &= A^n U_0 \end{aligned}$$

3. En diagonalisant la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A ***est :***

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-4-\lambda) + 18 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Donc $Sp(A) = \{-1, 2\}$ *simples*
Puisque $P_A(\lambda)$ *est scindé et* A *admet deux valeurs propres simples donc* A *est diagonalisable.*

Sous espace propre associé à $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ tq \ Au_1 = -u_1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ tq \ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

en résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 5x+3y=-x \\ -6x-4y=-y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x+3y== \\ -6x-3y=0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad y=-2x$$

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ tq \ y=-2x \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ tq \ x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Sous espace propre associé à $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \left\{ u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ tq \ Au_2 = 2u_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ tq \ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

en résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 5x+3y=2x \\ -6x-4y=2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+3y== \\ -6x-6y=0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad y=-x$$

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ tq \ y=-x \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ tq \ x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Alors la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ *est inversible et* $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t P^{com}$

Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2(-1)^n - 2^{n+1} & 2(-1)^n - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a $$\begin{aligned} U_n = A^n U_0 &\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2(-1)^n - 2^{n+1} & 2(-1)^n - 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x_n = 2^n \\ y_n = -2^n \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2.6. *soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Déterminer le polynôme minimal de* A.
2. A *est elle inversible ? Si oui, déduire* A^{-1}.
3. *Calculer* $A^6 - 4A^5 + 3A^4 + 6A^3 - 10A^2 + 6A$.

Solution d'exercice 2.6. *Ssoit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A ***est :***

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Alors le polynôme minimal noté $m_A(\lambda)$ *soit*

$$\begin{cases} m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2) \\ \qquad ou \\ m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m_A(A) = (A-I_3)(A-2I_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Coclusion $m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$

2. A ***est elle inversible***

$P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = det(A-\lambda I_3)$

$\Longrightarrow det(A) = P_A(0) = 2 \neq 0$

$\Longrightarrow A$ *est inversible*

$\Longrightarrow A$ *existe*

$$\begin{aligned} m_A(A) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (A-I_3)(A-2I_3) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad A^2 - 3A + 2I_3 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad A(A-3I_3) = -2I_3 \\ &\Longrightarrow \quad \tfrac{-1}{2}A(A-3I_3) = I_3 \\ &\Longrightarrow \quad A^{-1} = \tfrac{-1}{2}(A-3I_3) \\ &\Longrightarrow \quad A^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Considérons le polynôme $P(X) = X^6 - 4X^5 + 3X^4 + 6X^3 - 10X^2 + 6X$ *et faisons la divisions eucludienne de* $P(X)$ *par* $P_A(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ *on trouve que* $P(X) = P_A(X)(X^3 - 2X) + 2X$ *alors* $P(A) = \underbrace{P_A(A)}_{=0}(A^3 - 2A) + 2A$

Donc $A^6 - 4A^5 + 3A^4 + 6A^3 - 10A^2 + 6A = 2A$

Exercice 2.7. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*
2. *Déterminer la décomposition de Dunford de A.*
3. *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Solution d'exercice 2.7. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A ***est :***

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)^3 \end{aligned}$$

La décomposition de dunford de A

On a $P_A(\lambda) = -(1+\lambda)^3$ *l'unique valeur propore de* A *est* -1 *d'ordre 3.*

Notons $A = D + N$ *la décomposition de dunford de* A*, comme* D *est diagonalisable et* $P_D(\lambda) = P_A(\lambda) = -(1+\lambda)^3$ *; alors* D *est semblable à* $-I_3$*.*

$D = -I_3$ *et* $N = A + I_3$*. Ce qui donne :*

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

et $N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$

Calculons $A^n,\ n \in \mathbb{N}$

On a $N = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$ *et* $DN = ND$ *alors*

$$
\begin{aligned}
A^n &= (D+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n N^k D^{n-k} \\
&= C_0^n N^0 D^n + C_1^n N^1 D^{n-1} + \underbrace{C_2^n N^2 D^{n-2}}_{=0} \\
&= I_3 D^n + nND^{n-1} \quad /D = -I_3 \\
&= (-1)^n I_3 + nN(-1)^{n-1} I_3 \\
&= (-1)^n (I_3 - nN)
\end{aligned}
$$

Donc $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1-4n & 0 & -8n \\ -3n & 1 & -6n \\ 2n & 0 & 1+4n \end{pmatrix}$

Exercice 2.8. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A et son polynôme minimal.*
2. *Calculer les sous espace propres et les sous espaces caractéristique de A.*
3. *Déterminer la décomposition de Dunford de A.*

Solution d'exercice 2.8. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Le polynôme caractéristique de A ***est :***

$$
\begin{aligned}
P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda-1)^2(\lambda+2)
\end{aligned}
$$

Le polynôme minimal noté m_A *soit* $\begin{cases} m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2) \\ \text{où} \\ m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{cases}$

Calculons $m_A(A) = (A - I_3)(A + 2I_3) \neq 0$

Donc le polynôme minimal est $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$

Sous espace propre associé à $\lambda = -2$ ***noté*** $E_{-2}(A)$

$$E_{-2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

On résoudre le système suivant

$$\begin{cases} -2z = -2x \\ x + 3z = -2y \\ y = -2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_{-2}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad dim E_{-2}(A) = 1 \end{aligned}$$

Sous espace propre associé à $\lambda = 1$ ***noté*** $E_1(A)$

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

On résoudre le système suivant

$$\begin{cases} -2z = x \\ x + 3z = y \\ y = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= vect \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad dim E_1(A) = 1 \end{aligned}$$

Sous espace caractéristique associé à $\lambda = -2$ ***noté*** $N_{-2}(A)$

$$\begin{aligned} N_{-2}(A) &= \ker(A + 2I_3) \\ &= E_{-2}(A) \\ &= vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Sous espace caractéristique associé à $\lambda = 1$ ***noté*** $N_1(A)$

$$\begin{aligned} N_1(A) &= \ker(A - I_3)^2 \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (A - I_3)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

On résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ -2x + 4y - 8z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \implies x = 2y - 4z$$

$$\begin{aligned} N_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} 2y - 4z \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= vect \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

puisque $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants alors* $dim N_1(A) = 2$

La décomposition de dunford de A ***:***

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *l'endomorphisme associe à la matrice* A *dans la base cannonique*

On pose $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sont les vecteurs des sous espaces caractéristiques

La matrice associé à u *dans la base* $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ *est*

$$M = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

telle que $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La décomposition de dunford de M ***est :***

$M = D' + N'$ *telle que* $D' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $N'^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$

d'ou en déduire la décomposition de dunford de A *est :*

$A = PD'P^{-1} + PN'P^{-1}$

où $D = PD'P^{-1} = 1/3 \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable.*

$N = PN'P^{-1} = 1/3 \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est nilpotent.*

Chapitre 3

Trigonalisation d'un endomorphisme

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$- espace de dimension finie. Un endomorphismt f de E est dit trigonalisable (on dit aussi triangularisable) s'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de f est triangulaire. Trigonaliser f, c'est trouver une telle base.*

Remarquons que cette définition ne précise pas si la matrice triangulaire doit être supérieure ou inférieure. A ce propos, rappelons que si $\mathcal{B}$ désigne une base de E et si $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure alors, en désignant par $\mathcal{C}$ la base obtenue à partir de $\mathcal{B}$ en inversant l'ordre des vecteurs, $Mat_{\mathcal{C}}(f)$ est triangulaire inférieure. On peut donc toujours supposer, sans restriction aucune, que la matrice triangulaire dont il est question dans la définition 3.1.1, est supérieure.

Définition 3.1.2. *Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire, c 'est-à-dire s 'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et s 'il existe une matrice triangulaire $T \in M_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$T = P^{-1}AP.$$

Trigonaliser A, c'est trouver T .

Donnons à présent une caractérisation d'un endomorphisme trigonalisable en dimension finie.

Proposition 3.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme f de E soit trigonalisable est que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$*

Démonstration Désignons par n la dimension de l'espace E. Montrons dans un premier temps que la condition est nécessaire. Supposons f trigonalisable et déduisons-en que son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Puisque, par hypothèse, l'endomorhisme f est trigonalisable, il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Utilisons $Mat_{\mathcal{C}}(f)$ pour calculer le polynôme caractéristique de f. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_f(\lambda) = det(Mat_{\mathcal{C}}(f) - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - \lambda)$$

puisque $Mat_{\mathcal{C}}(f)$ est triangulaire, ce qui montre que P_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
Montrons à présent que la condition est suffisante. Supposons le polynôme caractéristique de f scindé sur $\mathbb{K}$ et montrons qu'il existe alors une base de E relativement à laquelle la matrice associée à f est triangulaire. Utilisons pour cela un raisonnement par récurrence sur la dimension n de l'espace E. Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Supposons-le vérifié pour les espaces de dimension $n - 1$ avec $n \geq 2$. Soient E un espace de dimension n et f un endomorphisme de E. Le fait que P_f soit scindé sur $\mathbb{K}$ nous assure que f possède au moins une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Désignons par u_1 un vecteur propre de f associé à λ_1. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $n - 1$ vecteurs $w_2, w_3, \dots, W_n$ de E tels que la famille $\mathcal{B}_E = (u_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$ est une base de E. Écrivons la matrice associée à f relativement à cette base. Pour tout

$j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, notons $\alpha_j, m_{2j}, m_{3j}, \ldots, m_{nj}$ les coordonnées du vecteur $f(w_j)$ dans $\mathcal{B}_E$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(w_2) & = & \alpha_2 u_1 + m_{22}w_2 + m_{32}w_3 + \ldots + m_{n2}w_n \\ f(w_3) & = & \alpha_3 u_1 + m_{23}w_2 + m_{33}w_3 + \ldots + m_{n3}w_n \\ & & \\ f(w_n) & = & \alpha_n u_1 + m_{2n}w_2 + m_{3n}w_3 + \ldots + m_{nn}w_n \end{array}\right.$$

On a aussi $f(u_1) = \lambda_1 u_1$. On en déduit :

$$Mat_{\mathcal{B}_E}(f) = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \hline 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{array}\right)$$

Soit F le sous-espace de E engendré par les $n-1$ vecteurs $w_2, w_3, \ldots, w_n$. Ces derniers étant linéairement indépendants, la dimension de F est égale à $n-1$ et une base de F est la famille $\mathcal{B}_F = (w_2, w_3, \ldots, w_n)$. À l'évidence, les deux sous-espaces $\mathbb{K}u_1$ et F sont supplémentaires dans E. Intéressons-nous à l'endomorphisme de F, noté g, dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}_F$ est donnée par

$$Mat_{\mathcal{B}_E}(f) = \begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice carrée d'ordre $n-1$. On se convainc facilement que g peut s'écrire comme suit : $g = p \circ f|_F$ où $f|_F : F \to E$ est la restriction de f au sous-espace F, et où $p : E \to F$ est l'application (linéaire) qui à un vecteur de E associe son composant dans F. Le polynôme caractéristique de g est scindé puisque celui de f l'est. Utilisons notre hypothèse de récurrence : il existe une base de F, notée $\mathcal{C}_F = (u_2, u_3, \ldots, u_n)$

telle que

$$Mat_{\mathcal{C}_F}(g) = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice d'ordre $n-1$ triangulaire supérieure. Revenons à présent à l'espace E. Considérons la nouvelle base $\mathcal{C}_E$ que nous obtenons en complétant le vecteur u_1 des $n-1$ vecteurs $u_2, u_3, \ldots, u_n$, c'est-à-dire considérons la base : $\mathcal{C}_E = (u_2, u_3, \ldots, u_n))$. Écrivons enfin la matrice associée à f relativement à cette nouvelle base. Puisque $\mathbb{K}u_1$ et F sont supplémentaires dans E, pour tout $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, il existe un unique $\beta_j \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(u_j) = \underbrace{\beta_j u_1}_{\in \mathbb{K}u_1} + \underbrace{p(f(u_j))}_{\in F}.$$

Or $p(f(u_j)) = g(u_j)$ pour $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$ Ainsi, en tenant compte de l'expression de $Mat_{\mathcal{C}_F}(g)$, on obtient :

$$\begin{cases} f(u_2) & = & \beta_2 u_1 + t_{22} u_2 \\ f(u_2) & = & \beta_3 u_1 + t_{23} u_2 + t_{33} u_3 \\ & & \\ f(u_2) & = & \beta_n u_1 + t_{2n} u_2 + t_{3n} u_3 + \ldots + t_{nn} u_n \end{cases}$$

On en déduit finalement l'expression de la matrice $Mat_{\mathcal{C}_E}(f)$:

$$Mat_{\mathcal{C}_E}(f) = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{array}\right)$$

C'est une matrice triangulaire (supérieure), ce qui termine la récurrence.

Remarque Si un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est trigonalisable, alors les éléments se trouvant sur la diagonale principale de T sont nécessairement les valeurs propres de f, et, en notant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes deux à deux, de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$, chaque valeur propre λ_i avec $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, y figure h_i fois.

Tout endomorphisme est-il trigonalisable ?

La réponse à cette question est « non » si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et « oui » si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En effet, d'après la proposition 3.1.1, pour qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E soit trigonalisable, il faut et il suffit que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$, autrement dit, que le nombre de ses valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) soit égal à la dimension de E. Il est clair que cette condition n'est pas toujours vérifiée si le corps de référence est $\mathbb{R}$. En revanche, elle est automatiquement vérifiée lorsque l'on travaille dans $\mathbb{C}$ puisque tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Ainsi, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (ou toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$) est trigonalisable.

En pratique, pour trigonaliser un endomorphisme ou une matrice, on procèdera en suivant pas à pas les étapes de la démonstration de la proposition 3.1.1. L'exemple traité au paragraphe suivant illustre cette remarque.

3.2 Illustration avec un exemple

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à (x_1, x_2, x_3) associe

$$(-2x_1 - x_2 + 2x_3, -15x_1 - 6x_2 + 11x_3, -14x_1 - 6x_2 + 11x_3).$$

Cet endomorphisme est-il trigonalisable ? Pour répondre à cette question, nous choisissons de munir l'espace $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$, et d'effectuer la recherche des valeurs propres dans cette base. Il est à noter que le fait d'avoir choisi la base canonique est tout à fait arbitraire, toute autre base de l'espace $\mathbb{R}^3$ conviendrait. Notons A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}_c$. Elle s'écrit :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ En développant par rapport à l a première ligne,

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 2 \\ -15 & -6-\lambda & 11 \\ -14 & -6 & 11-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-2-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} -6-\lambda & 11 \\ -6 & 11-\lambda \end{vmatrix}}_{=\lambda(\lambda-5)} + \underbrace{\begin{vmatrix} -15 & 11 \\ -14 & 11-\lambda \end{vmatrix}}_{=(15\lambda-11)} +2\underbrace{\begin{vmatrix} -15 & -6-\lambda \\ -14 & -6 \end{vmatrix}}_{=(6-14\lambda)}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_f(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3.$$

L'endomorphisme f est trigonalisable (puisque son polynôme caractéristique est scindé) et $Sp(A) = \{1\}$. Remarquons que la matrice A n'est certainement pas diagonalisable, car si elle l'était, elle serait semblable à la matrice identité d'ordre 3, et donc nécessairement égale à I_3, ce qui, de toute évidence, n'est pas le cas. Cherchons à présent les vecteurs propres de f associés à la valeur propre triple $\lambda = 1$. Effectuons les calculs dans la base canonique $\mathcal{B}_c$. Soit $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un vecteur propre rapporté à $\mathcal{B}_c$. On doit résoudre :

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il vient $x_1 = x_3/2$ et $x_2 = x_3/2$ avec $x_3 \in \mathbb{R}$ En choisissant $x_3 = 2$, on obtient le vecteur propre $u_1 = (1, 1, 2)$, c'est-à-dire :

$$u_1 = e_1 + e_2 + 2e_3. \tag{3.1}$$

Il s'agit à présent de compléter le vecteur u_1 par deux vecteurs de telle sorte que l'on obtienne une base de $\mathbb{R}^3$. Il y a une infinité de manières d'y arriver. Par souci de simplicité, nous choisissons de compléter u_1 par les deux vecteurs $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Nous obtenons la nouvelle base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (u_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Écrivons la matrice représentative f tive de dans cette nouvelle base. En utilisant l'égalité $e_1 = u_1 - e_2 - 2e_3$ (qui se déduit de (3.1)), on obtient d'une part :

$$f(e_2) = -e_1 - 6e_2 - 6e_3 = -u_1 - 5e_2 - 4e_3$$

et d'autre part :

$$f(e_3) = 2e_1 + 11e_2 + 11e_3 = 2u_1 + 9e_2 + 7e_3.$$

D'où, puisque $f(u_1) = u_1$,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f) = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants e_2 et e_3. La famille $\mathcal{B}_F = (e_2, e_3)$ constitue une base de F. On s'intéresse maintenant à l'endomorphisme g de F tel que

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g(e_2) & g(e_3) \end{array} \\ Mat_{\mathcal{B}_F}(g) = & \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Le but est maintenant de trigonaliser g. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_g(\lambda) = det(Mat_{\mathcal{B}_F}(g) - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Cherchons les vecteurs propres de g associés à la valeur propre double $\lambda = 1$. Nous effectuons les calculs dans la base $\mathcal{B}_F$. Soit $x_2e_2 + x_3e_3$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$, rapporté à la base $\mathcal{B}_F$. Trouver x_2 et x_3 revient à résoudre :

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il vient facilement $x_2 = 3x_3/2$ avec $x_3 \in \mathbb{R}$. Ainsi, en choisissant $x3 = 2$, on obtient le vecteur propre

$$u_2 = 3e_2 + 2e_3, \tag{3.2}$$

c'est-à-dire $u_2 = (0, 3, 2)$ puisque $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3(0, 0, 1)$. Écrivons à présent la matrice représentative de g dans la nouvelle base $\mathcal{C}_F = (u_2, e_3)$ du sous-espace F. D'une part, $g(u_2) = u_2$ puisque u_2 est un vecteur propre de g associé à la valeur propre $\lambda = 1$. D 'autre part, on déduit de $Mat_{\mathcal{B}_F}(g)$ que

$$g(e_3) = 9e_2 + 7e_3,$$

Or, $e_2 = \frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}e_3$ (cela se déduit de (3.2)). Ainsi,

$$g(e_3) = 9(\frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}e_3) + 7e_3 = 3u_2 + e_3.$$

On obtient ainsi :

$$Mat_{\mathcal{C}_F}(g) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} g(u_2) & g(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Revenons maintenant à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ et écrivons sa matrice représentative dans la nouvelle base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (u_1, u_2, e_3)$. On vérifie que l'on a :

$$\begin{aligned}
f(u_2) &= f(3e_2 + 2e_3) \\
&= 3f(e_2) + 2f(e_3) \\
&= 3(-u_1 - 5e_2 - 4e_3) + 2(2u_1 + 9e_2 + 7e_3) \\
&= u_1 + \underbrace{3e_2 + 2e_3}_{=u_2} \\
&= u_1 + u_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(e_3) &= 2u_1 + \underbrace{9e_2 + 7e_3}_{=3u_2+e_3} \\
&= 2u_1 + 3u_2 + e_3
\end{aligned}$$

D 'où, puisque $f(u_1) = u_1$,

$$Mat_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ e_3 \end{array}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure. Notons-la T. On a alors la relation matricielle : $T = P^{-1}AP$ où P désigne la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (u_1, u_2, e_3)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=P}$$

3.3 Réduction de Jordan

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes deux à deux, de multiplicités respectives

$h_1, h_2, \ldots, h_m$. On peut affiner le résultat de la proposition 3.1.1 et montrer que sous la même condition, à savoir si le polynôme caractéristique de f est scindé, autrement dit si $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n$, alors il existe une base $\mathcal{C}$ de E relativement à laquelle la matrice associée à f s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_m \end{array}\right)$$

où, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, la sous-matrice J_i est carrée, d'ordre h_i, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et est définie par

$$J_i = \lambda_i I_{h_i} + N_i$$

où I_{h_i} désigne la matrice identité d'ordre h_i et où la matrice N_i est définie par

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2^{(i)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \epsilon_{h_i-1}^{(i)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les scalaires $\epsilon_1^{(i)}, \epsilon_2^{(i)}, \ldots, \epsilon_{h_i-1}^{(i)}$ valent 0 ou 1. pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, la matrice N_i est nilpotente puisqu'elle est triangulaire supérieure stricte. La matrice J est une matrice carrée, d'ordre n, triangulaire supérieure. Elle a une forme remarquable, dite diagonale par blocs. Les blocs diagonaux sont les sousmatrices $J_1, \ldots, J_m$ d'ordres respectifs $h_1, \ldots, h_m$ (non nécessairement égaux) et les blocs hors-diagonaux sont des sous-matrices (non nécessairement carrées) à coefficients nuls. On convient de noter J comme suit :

$$J = diag(J_1, \ldots, J_m).$$

La matrice J est appelée forme réduite de Jordan associée à f, du nom du mathématicien français Camille JORDAN $(1838 - 1922)$. La démonstration de ce résultat est admise. Il est à noter que la réduction de Jordan fournit une version matricielle (représentation dans la base $\mathcal{C}$) de la décomposition de Dunford (voir la proposition 2.2.3). En effet, on remarque que l'on peut décomposer la matrice J comme la somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice triangulaire supérieure stricte N :

$$J = D + N$$

où les deux matrices carrées D et N sont diagonales par blocs :

$$D = diag(\lambda_1 I_{h_1}, \lambda_2 I_{h_2}, \dots, \lambda_m I_{h_m}) \text{ et } N = diag(N_1, N_2, \dots, N_m)$$

Pour chaque entier i compris entre 1 et m, les blocs $\lambda_i I_{h_i}$, et N_i étant de même taille, leur produit matriciel est bien défini. On vérifie :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \left((\lambda_i I_{h_i}) \times N_i = N_i \times (\lambda_i I_{h_i}) \;\; et \;\; N_i^{h_i} = 0_{h_i} \right).$$

On en déduit que le produit des deux matrices D et N est commutatif, $D \times N = N \times D$, et que la matrice N est nilpotente, $N^p = 0$ avec $p = max\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. Ainsi, la matrice D (respectivement la matrice N) est la représentation matricielle dans $\mathcal{C}$ de la partie diagonalisable g (resp. de la partie nilpotente h) de l'endomorphisme f.

Exemple Nous reprenons ici l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considérons la nouvelle base $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (-1, 2, 0)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$. On vérifie :

$$f(u_1) = 2u_1, \;\; f(u_2) = u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = u_2 + u_3.$$

La matrice représentative de f relativement à la base $\mathcal{C}$ s'écrit ainsi :

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = diag\left((2), \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

C'est la forme réduite de Jordan associée à f. Elle se décompose comme suit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=J} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{C}$. On a $J = P^{-1}AP$, d'où

$$A = PJP^{-1} = P(D+N)P^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}.$$

Posons $G = PDP^{-1}$ et $H = PNP^{-1}$. On vérifie :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=G} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=H} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}}$$

On retrouve les expressions de G et H. La matrice A se décompose de la façon suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=G} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=H}$$

La matrice G (respectivement la matrice H) est la représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}_c$ de la partie diagonalisable g (resp. de la partie nilpotente h) de l'endomorphisme f.

3.4 Exercices

Exercice 3.1. *Trigonaliser les matrices suivantes dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 5 \\ 18 & -10 & 7 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solution d'exercice 3.1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A ***est :***

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & -1-\lambda & 6 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-1-\lambda)(4-\lambda)+6] \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{aligned}$$

puisque $P_A(\lambda)$ *est scindé alors* A *est trigonalisable.*
Les valeurs propres de A *sont :* $\lambda_1 = 2$ *valeur propre simple et* $\lambda_2 = 1$ *valeur propre double.*

Sous espace propre associé à $\lambda_1 = 2$ ***:***

$$E_2(A) = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; tq \; Au = 2u \right\}$$

$$\begin{aligned} Au = 2u \implies A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} x + 2y - 4z &= 2x \\ -y + 6z &= 2y \\ -y + 4z &= 2z \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases} \end{aligned}$$

$$E_2(A) = \left\{ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \ tq \ z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2(A) = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ et \ \dim E_2 = 1$$

Sous espace propre associé à $\lambda_2 = 1$ ***:***

$$E_2(A) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ tq \ Av = v \right\}$$

$$Av = v \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{lcl} x + 2y - 4z & = & x \\ -y + 6z & = & y \\ -y + 4z & = & z \end{array} \right.$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ z = 0 \\ y = 3z \end{array} \right.$$

$$E_1(A) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ tq \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_1(A) = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ et \ \dim E_1 = 1$$

La matrice A n'est pas diagonalisable car $\dim E_1 \neq mult(\lambda_2 = 1)$

Pour trigonaliser la matrice A il suffit de compléter la famille libre $\{u, v\}$ *en une base* *de* $\mathbb{R}^3$*. Soit* $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Le choix est loin d'étre unique) la famille $\{u, v, w\}$ *est bien une base de* $\mathbb{R}^3$ *car* $(\det P = 2 \neq 0)$*Telle que* P *est la matrice de passage*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice semblable $T = P^{-1}MP$*. S'écrit*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ T = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array}$$

Les valeurs propres sont sur le diagonale. On peut calculer les paramètres a, b*. Soit en calculant* $P^{-1}MP$*. Soit plus simplement en écrivant que*

$$\begin{aligned} f(w) = au + bv + w &\Longrightarrow Aw = au + bv + w \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ 2a = 6 \\ a + 1 = 4 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la matrice A est semblable à la matrice tringulaire

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de B est :

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = det(B - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda)[(1-\lambda)(-2-\lambda)+2] - 2[(2+\lambda)-1] - 1[-2+1-\lambda] \\ &= -(\lambda+1)^3 \end{aligned}$$

puisque $P_B(\lambda)$ est scindé alors B est trigonalisable.

Les valeurs propres de B sont : $\lambda_1 = -1$ valeur propre triple

Sous espace propre associé à $\lambda_1 = -1$:

$$E_{-1}(B) = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ tq \ Bu = -u \right\}$$

$$\begin{aligned} Bu = -u \quad &\Longrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} -2x+2y-z &= -x \\ -x+y-z &= -y \\ -x+2y-2z &= -z \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} z = -x+2y \\ -x+2y+x-2y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{-1}(B) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} tq\ z = -x + 2y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x + 2y \end{pmatrix} tq\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} tq\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$E_{-1}(B) = Vect \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

puisque u_1, u_2 *sont linéairement indépendants donc la base de* E_{-1} *est*

$$\mathcal{B}_{E_{-1}} = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \dim E_{-1}(B) = 2$$

alors la matrice B *n'est pas diagonalisable, car* $\dim E_{-1}(B) = 2 \neq mult(\lambda = 1) = 3$ *Pour trigonaliser la matrice* B *il suffit de compléter la famille libre* $\{u_1, u_2\}$ *en une base de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Le choix est loin d'étre unique) la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ *est bien une base de* $\mathbb{R}^3$ *car* $(detP = 2 \neq 0)$*Telle que* P *est la matrice de passage*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice semblable $T = P^{-1}BP$. *S'écrit*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

Les valeurs propres sont sur le diagonale. On peut calculer les paramètres a, b. Soit en calculant $P^{-1}BP$. Soit plus simplement en écrivant que

$$\begin{aligned} f(u_3) = au_1 + bu_2 + u_3 &\implies Bu_3 = au_1 + bu_2 + u_3 \\ &\implies \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ a + 2b + 1 = -2 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la matrice B est semblable à la matrice tringulaire

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $C = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 5 \\ 18 & -10 & 7 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de C est :

$$\begin{array}{rcl} P_C(\lambda) & = & det(C-\lambda I_3) \\ & = & \begin{vmatrix} 11-\lambda & 0 & 5 \\ 18 & -10-\lambda & 7 \\ -6 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ & = & (11-\lambda)[(-10-\lambda)(-4-\lambda)-21]+6[18(-4-\lambda)+42]+5[54+6(-10-\lambda)] \\ & = & -(\lambda+1)^3 \end{array}$$

puisque $P_C(\lambda)$ est scindé alors C est trigonalisable.

Les valeurs propres de C sont : $\lambda_1=-1$ valeur propre triple

Sous espace propre associé à** $\lambda_1=-1$ **:

$$E_{-1}(C)=\left\{u=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ tq\ Cu=-u\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} Cu=-u & \Longrightarrow & \begin{pmatrix} 11 & -6 & 5 \\ 18 & -10 & 7 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\ & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 11x-6y+5z & = & -x \\ 18x-10y+7z & = & -y \\ -6x+3y-4z & = & -z \end{array}\right. \\ & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ y=2x \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{aligned}
E_{-1}(C) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; tq \; z = 0, y = 2x \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \; tq \; x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; tq \; x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= Vect \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

$dimE_{-1}(C) = 1$

on a $P_C(\lambda)$ *est scindé et on a* $dimE_{-1}(C) = 1 \neq mult(\lambda = -1) = 3$ *donc la matrice n'est pas diagonalisable alors* C *est trigonalisable telle que*

$$f(u_1) f(u_2) f(u_3)$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

Pour triogonaliser la matrice, nous n'avons de méthode efficace, on commence à chercher un vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *tq* $f(u_2) = au_1 - u_2 \Longrightarrow Au_2 + u_2 = au_1$

Ce système linéaire indéterminer on prend $a = 1$ *(a est nécessairement non nul)*
On aalors le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 11x - 6y + 5z + x = 1 \\ 18x - 10y + 7z + y = 2 \\ -6x + 3y - 4z + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 2x - 1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

u_2 qui admet comme solution $\begin{pmatrix} x \\ 2x-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *on prendra $x = 1$, on trouve* $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On complétons la famille $\{u_1, u_2\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$ $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *la fammile $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car ($detP = -1 \neq 0$)Telle que P est la matrice de passage*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice semblable $T = P^{-1}CP$. S'écrit

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

On peut calculer les paramètres b, c, soit en calculons $P^{-1}CP$, soit plus simplement

$$Cu_3 = bu_1 + cu_2 - u_3 \implies \begin{pmatrix} 11 & -6 & 5 \\ 18 & -10 & 7 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2b-c \\ -c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{cases} b = 5 \\ 2b - c = 7 \\ -c - 1 = -4 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

alors C est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.2. *Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de A.*
2. *Montrer que A n'est pas diagonalisable.*
3. *Déterminer une forme réduite de jordan da A.*
4. *Préciser la base de jordan et la matrice de passage.*
5. *Calculer le polynôme minimal de A.*
6. *En déduire l'expression de A^{-1}.*

Solution d'exercice 3.2. ***Le polynôme caractéristique de A est :***

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 3)^4 \end{aligned}$$

$Sp(A) = \{-3\}$

Sous espace propre associé à $\lambda = -3$

$$E_{-3}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

On résoudre le système suivant

$$\begin{cases} -2x - y + z + 2t = -3x \\ x - 4y + z + 2t = -3y \\ -5z + 4t = -3z \\ -z - t = -3t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y - 4t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_{-3}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} y-4t \\ y \\ 2t \\ t \end{pmatrix}, /y, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} /y, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont linéairement indépendants.*

donc $dim E_{-3}(A) = 2 \neq 3 = mult(\lambda = -3) = 4$

Alors A n'est pas diagonalisable.

Déterminon une réduite de Jordan de A

On pose $M = A + 3I_4$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $rg(M) = 2$ *car* $C_2 = -C_1$ *et* $C_4 = -2C_3 + 4C_1$, *donc d'après le théorème du* *rang on a dim* $\ker(M) = 2$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $rg(M) = 1$ *donc dim* $\ker M^2 = 3$
$M^3 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ *Donc en déduire que la réduite de jordan de A comporte deux(2) blocs associée à valeur propre* $(\lambda = -3)$ *(car dim* $\ker(M) = 2$*) et on sait que le plus grand des blocs est de taille* 3 *(car* $M^3 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$*).*
On sait donc que dans une base de jordan la matrice réduite de jordan sera de la forme

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc} -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Précisons la base de Jordan et la matrice de passage
On choisit donc un vecteur $u_4 \in \ker(M^3)/\ker(M^2)$

$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *puis* $u_3 = Mu_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

EN fin $u_2 = Mu_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il nous manque un vecteur u_1 *qui soit dans* $\ker(M)|Vect\{u_2\}$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *est une base de Jordan et la matrice de passage correspondant est*

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme minimal de A *est donc directement par la réduite de jordan, en effet on sait que* $P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k}$ *alors polynôme minimal de* A *est donne par* $m_A(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_k)^{n_k}$ *ou* n_i *désigne la taille de plus grand blocs de jordan associe à la valeur propre* λ_i.

Ici il ya qu'une valeur propre $\lambda = -3$ *de plus son plus grand blocs de taille* 3 *donc le polynôme minimal est* $m_A(X) = (X + 3)^3$.

En déduire l'éxpression de A^{-1}

on a $m_A(X) = (X + 3)^3$ *d'après le théorème de Cayley -Hamilton*

$$\begin{aligned} m_A(A) = 0 &\implies (A + 3I_4)^3 = 0 \\ &\implies A^3 + 9A^2 + 27A + 27I_4 = 0 \\ &\implies A(A^2 + 9A + 27I_4) = -27I_4 \\ &\implies A^{-1} = \tfrac{-1}{27}(A^2 + 9A + 27I_4) \end{aligned}$$

Chapitre 4

Annales

Exercice 4.1. *(C.C) On considère la matrice réelle* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de A.*
2. *Calculer les valeurs propres de A.*
3. *Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associes aux valeurs propres de A.*
4. *Justifier pourquoi A est diagonalisable.*
5. *Expliciter une base B de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A est représentée par une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice inversible P vérifiant $A = PDP^{-1}$.*

Exercice 4.2. *(C.C) Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme sur E, A une matrice associée à f dans une base quelconque et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

$\sim$ *Montrer que : λ est une valeur propre de $f \Longleftrightarrow det(A - \lambda I_n) = 0$.*

Exercice 4.3. *(C.C) Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, f un endomorphisme de E telle que $f^3 = f$.*

$\sim$ *Montrer que : $E = kerf \oplus E_1 \oplus E_{-1}$. Où*

$$E_1 = \{x \in E / f(x) = x\} \quad et \quad E_{-1} = \{x \in E / f(x) = -x\}$$

Exercice 4.4. *(C.C) Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$

1. *Quelles sont les valeurs propres de f ?*
2. *Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*
3. *On suppose $m = 2$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 4.5. *(C.C) Déterminer la solution du système linéaire*

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n - z_n \\ z_{n+1} = 2y_n + 4z_n \end{cases}$$

Pour des conditions initiales $x_0 = y_0 = z_0 = 1$.

Exercice 4.6. *(Exam) Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose* $R(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le polynômes caractéristique de R(t).*
2. *Calculer l'inverse de R(t).*
3. *Montrer que $R(t)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et déterminer une matrice P inversible indépendante de t et une matrice diagonale D telle que :*

$$R(t) = PDP^{-1}$$

4. *Pour quels $t \in \mathbb{R}$, la matrice $R(t)$ est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 4.7. *(Exam) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f_α de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :* $M_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de M_α. Donner l'ensemble des valeurs propres de f_α.*
2. *Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?*
3. *On suppose dans cette question que $\alpha = -1$.*
   $\sim$ *Diagonaliser la matrice M_{-1} en précisant la matrice de passage.*
   $\sim$ *Donner le polynôme minimal de f_{-1}.*
4. *On suppose dans cette question que $\alpha = 1$*
   $\sim$ *Trigonaliser M_1 en précisant la matrice de passage.*

Exercice 4.8. *(Exam) Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que $\lambda = 1$ est une valeur propre triple et $\lambda = 2$ est une valeur propre simple de A.*
2. *Déterminer une forme réduite de Jordan de A et une base de Jordan associée.*
3. *Quel est le polynôme minimal de A ?*
4. *Déterminer la décomposition de Dunford de A.*

Exercice 4.9. *(Rattr) Soit pour m un réel, la matrice*

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A_m.*
2. *Quelles sont les valeurs propres deA_m ? Pour quelles valeurs de m, la matrice A_m nadmet que des valeurs propres simples.*
3. *En deduire que si $m \notin \{\frac{-1}{2}, 1\}$, la matrice A_m est diagonalisable.*
4. *Calculer $rg(A_1)$ et le polynôme minimal de A_1. la matrice A_1 est-elle diagonalisable ?*

5. *Déterminer la base de Jordan associée à* A_1.
6. *Déterminer les valeurs propres de* $A_{-1/2}$. *la matrice* $A_{-1/2}$ *est-elle diagonalisable ?*

Bibliographie

[1] Stéphane BALAC, Frédéric STURM, *Algèbre et analyse Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés* .2° édition revue et augmentée. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009

[2] Stéphane. B, Frédéric. S, *Exercices d'analyse et d'algèbre 154 exercices corrigés de première année* 2° édition revue et augmentée. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009

[3] Roger Manuy, Rached Mneimné *Algèbre Linéaire réduction des endomorphismes. Cours et exercices corrigés.* 2012

[4] Claude Deschamps, André Warusfel *Mathématiques Tout-en-un.*2^{e} *année MP cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 2004.